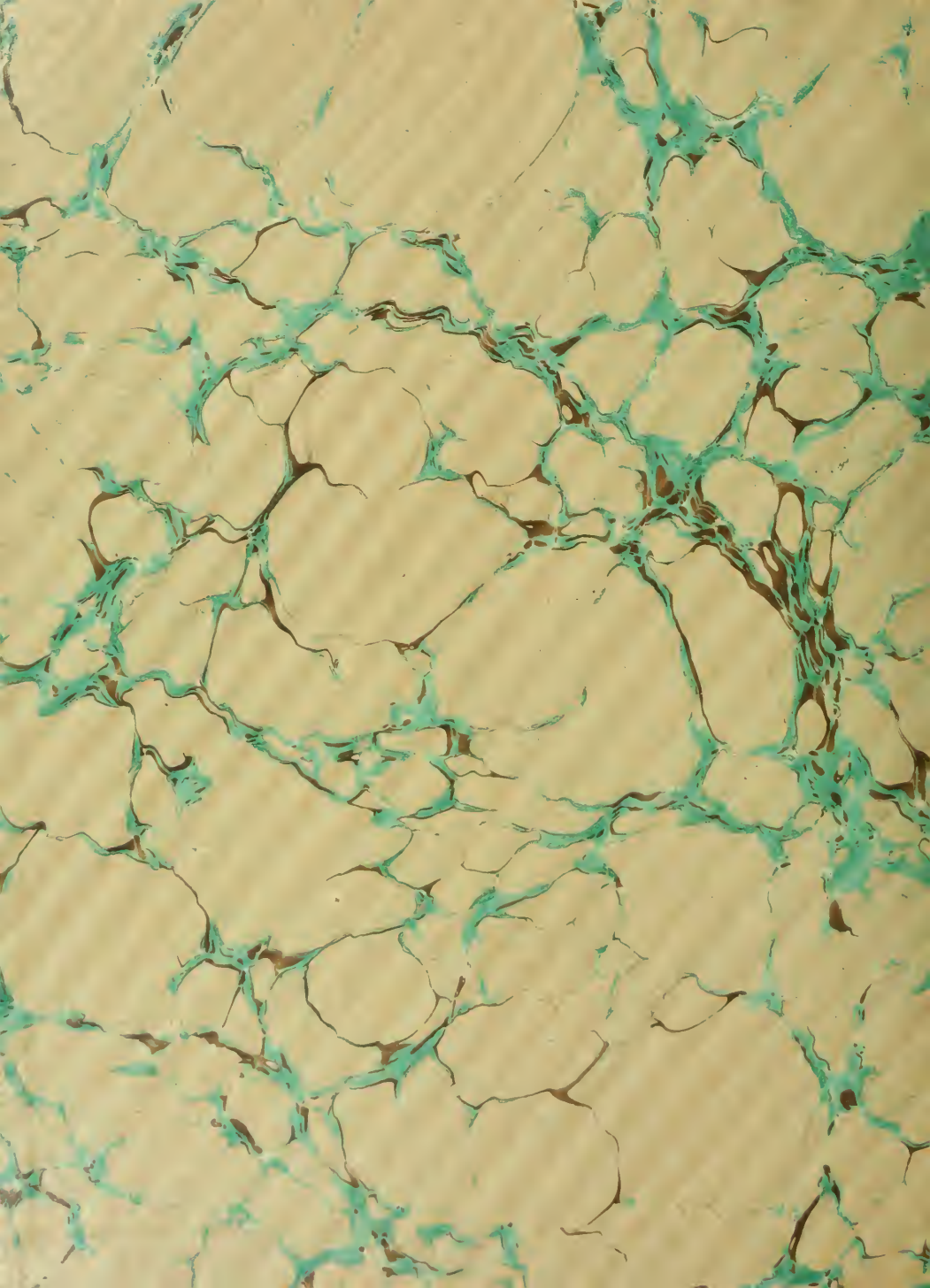


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3journaldemat08liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME HUITIÈME. — ANNÉE 1882.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1882

Tous droits réservés

GN
1
J654
Ser. 3
c.2

20803
c.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les coordonnées curvilignes;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Supposons une courbe tracée dans un plan, et considérons une partie ω de ce plan qui contienne cette courbe et dont tous les points en soient très voisins; de chaque point M du champ ω abaissons une normale MP sur la courbe; ce point sera déterminé par la longueur n de la normale MP et par la longueur σ de la courbe comprise entre un point fixe de cette courbe et le point P. Nous allons entrer dans quelques considérations sur ces coordonnées, et nous en ferons une application qui en prouvera l'utilité; nous terminerons en montrant comment un géomètre très savant et très habile s'est trompé en se servant de ces coordonnées, qu'il avait cru pouvoir regarder comme un système ordinaire de deux variables.

Des premières dérivations par rapport à σ et n.

1. Si u est une fonction des coordonnées rectangulaires x, y d'un point M, dont la valeur est connue pour toutes les positions du point M renfermées dans l'intérieur d'un contour σ, u a aussi une valeur déterminée en chaque point du contour, et si le point M décrit un arc infiniment petit $d\sigma$ du contour, la fonction u acquiert un accroissement infiniment petit que nous représenterons par

$$\frac{du}{d\sigma}\,d\sigma;$$

désignons par dn un élément de normale, mené intérieurement à la courbe σ et compté à partir de σ; si le point M décrit dn, la fonction u s'accroît d'une quantité que nous représenterons par

$$\frac{du}{dn}\,dn.$$

On voit, d'après cela, quelles quantités sont désignées par

$$\frac{du}{d\sigma},\ \frac{du}{dn},$$

bien que, comme nous verrons, σ et n ne puissent former un véritable système de deux variables.

Désignons par v l'angle de la normale avec l'axe des x; supposons que l'origine O des coordonnées rectilignes soit située à l'intérieur de la courbe et que l'arc σ croisse quand le point M se meut dans l'angle des coordonnées positives de Ox vers Oy.

Quand M s'avance de $d\sigma$ sur le contour, les coordonnées x, y s'accroissent de

$$d\sigma \sin v,\quad -d\sigma \cos v;$$

on a donc

$$\frac{du}{d\sigma}\,d\sigma = \frac{du}{dx}\,d\sigma \sin v - \frac{du}{dy}\,d\sigma \cos v$$

ou

$$(1)\qquad \frac{du}{d\sigma} = \frac{du}{dx}\sin v - \frac{du}{dy}\cos v.$$

On trouve de même

$$(2)\qquad \frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}\cos\varphi + \frac{du}{dy}\sin\varphi.$$

Quand on n'a à effectuer qu'une dérivation, il est permis de remplacer l'élément dn de ligne droite par un élément de courbe orthogonale sur la courbe σ. Mais il n'en est plus de même quand on a à effectuer plusieurs dérivations par rapport à σ et n.

Des doubles dérivations par rapport à σ et n.

2. Quand le point M se meut sur la courbe σ, φ varie d'une manière bien déterminée; on peut donc encore former les dérivées des seconds membres des formules (1) et (2) par rapport à σ. Si nous différentions la formule (1) par rapport à σ, nous aurons

$$\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} = \left(\sin\varphi\frac{d}{dx} - \cos\varphi\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\sin\varphi - \frac{du}{dy}\cos\varphi\right),$$

où il faudra développer les dérivations indiquées dans le second membre, en ayant soin de regarder φ comme fonction de x et y : on peut aussi remarquer que les dérivations qui ne portent pas sur φ donneront ces termes

$$\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi,$$

et que les dérivations par rapport à σ, en ne les faisant porter que sur φ, donnent

$$\left(\frac{du}{dx}\cos\varphi + \frac{du}{dy}\sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{d\sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn}\frac{d\varphi}{d\sigma}.$$

On a donc

$$\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} = \frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi + \frac{du}{dn}\frac{d\varphi}{d\sigma};$$

il en résulte cette formule

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \frac{du}{dn}\frac{d\varphi}{d\sigma},$$

où $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ représente évidemment la courbure de l'arc σ.

En opérant de même sur la formule (2), nous écrirons d'abord

$$\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} = \left(\sin c \frac{d}{dx} - \cos c \frac{d}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\cos c + \frac{du}{dy}\sin c\right),$$

et nous en conclurons

$$\text{B)} \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin c \cos c - \frac{d^2u}{dx\,dy}(\cos^2 c - \sin^2 c) = \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{dc}{d\sigma}.$$

3. La dérivation des formules (1), (2), par rapport à n, ne peut se faire avant d'avoir précisé le sens qu'on attachera à $\frac{dc}{dn}$. Imaginons une équation entre y et x qui contienne un paramètre a et qui, pour la valeur zéro de ce paramètre, se réduise à l'équation de la courbe σ. En donnant à a de très petites valeurs, on obtiendra des courbes très voisines de σ; concevons des arcs dn orthogonaux à ces courbes. L'angle c sera celui de la normale à une quelconque des courbes au paramètre a ou de la tangente à dn avec l'axe des x; on voit donc la signification de $\frac{dc}{dn}dn$, et par suite celle de $\frac{dc}{dn}$.

Nous pouvons maintenant différentier la formule (1) par rapport à n et nous obtiendrons, en opérant comme précédemment,

$$\text{C)} \quad \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin c \cos c - \frac{d^2u}{dx\,dy}(\cos^2 c - \sin^2 c) - \frac{du}{dn}\frac{dc}{dn}.$$

Cette dérivée seconde n'est pas complètement déterminée comme les deux précédentes; elle dépend, en effet, de $\frac{dc}{dn}$ ou de la courbure de l'arc dn; si dn est rectiligne, le dernier terme est nul. Des formules (B), (C), on conclut

$$\text{3)} \quad \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{dc}{d\sigma} = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} + \frac{du}{dn}\frac{dc}{dn},$$

ce qui montre que les signes $\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ ne peuvent être intervertis sur une même expression.

En différentiant (2) par rapport à n, on aura

$$(\mathrm{D})\quad \frac{d\frac{du}{dn}}{du} = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\varphi + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\varphi - \frac{du}{ds}\frac{dv}{dn},$$

dont le dernier terme est nul si dn est rectiligne.

Nous aurons à appliquer les formules (A), (B), (C).

Emploi des notations de Lamé.

4. Il est aisé de vérifier la formule (3), en adoptant les notations employées par Lamé dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

Considérons deux séries de courbes, orthogonales entre elles, dont les paramètres soient ρ et ρ_1, et représentées par les équations

$$f(x,y) = \rho, \quad f_1(x,y) = \rho_1;$$

les quantités ρ, ρ_1 constituent véritablement un système de deux variables. Désignons par ds_1 les éléments des premières courbes, par ds ceux des secondes. Si nous posons

$$h = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2}, \quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2},$$

nous aurons

$$ds = \frac{d\rho}{h}, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}.$$

Soit u une fonction d'un point du plan, on aura

$$\frac{du}{ds} = h\frac{du}{d\rho},$$

$$\frac{d\frac{du}{ds}}{ds_1} = h_1\frac{d\left(h\frac{du}{d\rho}\right)}{d\rho_1}$$

$$= hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + h_1\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{d\rho} = hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds}.$$

On aura de même

$$\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds} = hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{du}{ds_1}.$$

Comparons ces deux formules, et nous avons

$$\frac{d\dfrac{du}{ds_1}}{ds} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds} = \frac{d\dfrac{du}{ds}}{ds_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{du}{ds_1}.$$

Cette formule est identique avec la formule (3), car $\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}$, $\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}$, sont les courbures des arcs s et s_1 (*Coord. curvil.*, § 28).

Supposons que les lignes s_1 soient des droites et, par suite, que les lignes s soient des courbes parallèles. La courbure de s_1 étant nulle, on a $\frac{dh_1}{d\rho} = 0$, et h_1 ne dépend pas de ρ; de plus, nous pouvons prendre pour ρ_1 la longueur de la ligne droite s_1, comptée à partir d'une des courbes s, et nous obtiendrons

$$s_1 = \rho_1, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1};$$

on aura donc $h_1 = 1$.

5. On peut remarquer que les premiers membres des formules (A), (B) sont exprimés plus simplement par ces formules qu'ils ne le seraient par l'emploi des coordonnées ρ, ρ_1. En effet, en faisant coïncider la courbe σ avec une des courbes s, l'emploi des coordonnées ρ, ρ_1 donnerait, par exemple, au lieu de la formule (A),

$$\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi$$
$$= h^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{dh}{d\rho}\frac{du}{d\rho} - \frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{d\rho_1}.$$

Extension des formules (A), (B), (C), (D) à une surface.

6. Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer comment on peut trouver pour une surface des formules analogues aux formules (A), (B), (C), (D) relatives à une courbe. Mais pour les démontrer plus rapidement, nous nous servirons des formules des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

Imaginons trois systèmes de surfaces, orthogonales entre elles,

aux paramètres ρ, ρ_1, ρ_2; ces surfaces se coupent suivant leurs lignes de courbure s, s_1, s_2; ces lignes s, s_1, s_2 sont supposées respectivement normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2.

Soit u une fonction d'un point de l'espace et a, b, c les cosinus des angles de la normale à la surface ρ avec les trois axes rectangulaires de coordonnées; on aura

$$\frac{du}{ds} = a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz},$$

et ensuite

$$a \left\{ \begin{aligned} \frac{d\frac{du}{ds}}{ds} &= \left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz}\right)\left(a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz}\right) \\ &= a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2} + 2bc\frac{d^2u}{dy\,dz} + 2ca\frac{d^2u}{dz\,dx} \\ &\quad + 2ab\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{du}{dx}\frac{da}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{db}{ds} + \frac{du}{dz}\frac{dc}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$a = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}, \quad b = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}, \quad c = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz};$$

on a donc

$$\frac{da}{ds} = -\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho};$$

en remplaçant le dernier terme par sa valeur donnée (*Coordonnées curvilignes*, § 10), on a

$$\frac{da}{ds} = \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx};$$

on a ensuite

$$\frac{d\rho_1}{dx} = h_1\frac{dx}{ds_1}, \quad \frac{d\rho_2}{dx} = h_2\frac{dx}{ds_2},$$

et l'on en conclut la première de ces trois équations

$$\frac{da}{ds} = \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dx}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dx}{ds_2},$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dy}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dy}{ds_2},$$

$$\frac{dc}{ds} = \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dz}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dz}{ds_2},$$

les deux autres s'en déduisant par analogie. De ces trois équations l'on tire

$$\frac{du}{dx}\frac{da}{ds}+\frac{du}{dy}\frac{db}{ds}+\frac{du}{dz}\frac{dc}{ds}=\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds_1}+\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{du}{ds_2}.$$

Désignons généralement par R_{ij} le rayon de la courbure de la surface ρ_j suivant l'arc s_i; on aura

$$\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}=\frac{1}{R_{0,1}},\quad \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}=\frac{1}{R_{0,2}}.$$

Donc la formule (a) devient

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2\frac{d^2u}{dx^2}+b^2\frac{d^2u}{dy^2}+c^2\frac{d^2u}{dz^2}+2bc\frac{d^2u}{dy\,dz}+2ca\frac{d^2u}{dz\,dx}+2ab\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ &=\frac{d\frac{du}{ds}}{ds}+\frac{1}{R_{0,1}}\frac{du}{ds_1}+\frac{1}{R_{0,2}}\frac{du}{ds_2}.\end{aligned}\right.$$

Soient a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 les cosinus directeurs des tangentes aux arcs ds_1, ds_2, on aura

$$a_1^2\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+2b_1c_1\frac{d^2u}{dy\,dz}+\cdots=\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds_1}+\frac{1}{R_{1,2}}\frac{du}{ds_2}+\frac{1}{R_{1,0}}\frac{du}{ds},$$

$$a_2^2\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+2b_2c_2\frac{d^2u}{dy\,dz}+\cdots=\frac{d\frac{du}{ds_2}}{ds_2}+\frac{1}{R_{2,0}}\frac{du}{ds}+\frac{1}{R_{2,1}}\frac{du}{ds_1}.$$

En ajoutant ces trois formules, on aurait une expression de

$$\Delta u=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}.$$

On pourra former de la même manière la dérivée $\frac{d\frac{du}{ds}}{ds_1}$, et on en conclura cette formule

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &aa_1\frac{d^2u}{dx^2}+bb_1\frac{d^2u}{dy^2}+cc_1\frac{d^2u}{dz^2}+cb_1+bc_1\frac{d^2u}{dy\,dz}\\ &+(ac_1+ca_1)\frac{d^2u}{dz\,dx}+ba_1+ab_1\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ &=\frac{d\frac{du}{ds}}{ds_1}+\frac{1}{R_{1,0}}\frac{du}{ds_1}=\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds}+\frac{1}{R_{0,1}}\frac{du}{ds}.\end{aligned}\right.$$

7. Soit ensuite une surface S quelconque. Traçons sur cette surface ses deux systèmes de lignes de courbure; puis élevons des normales le long de ces lignes de courbure; ces normales formeront deux systèmes de surfaces orthogonales entre elles et développables. Sur chacune des normales portons, à partir de la surface S, une longueur constante; les extrémités de ces droites formeront deux séries de courbes, qui seront les lignes de courbure d'une surface S_1 parallèle à S. Les surfaces S_1 constitueront avec les deux systèmes de surfaces développables un triple système de surfaces orthogonales. Les surfaces S_1 étant supposées au paramètre ρ, ds sera un élément de droite normale à S et l'on aura $R_{0,1} = \infty$, $R_{0,2} = \infty$; ainsi les premiers membres des formules (*b*), (*c*) pourront être représentés respectivement par

$$\frac{d\frac{du}{ds}}{ds}, \quad \frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds}.$$

Sur les conditions au contour d'une plaque élastique dont le contour est libre.

8. L'équation qui régit le mouvement vibratoire transversal d'une plaque plane est de cette forme

$$a^2 \Delta \Delta w + \frac{d^2 w}{dt^2} = 0,$$

où w est le déplacement d'un point de la surface moyenne, normalement à cette surface. Pour obtenir une solution simple, on pose

$$w = u \sin l^2 at,$$

et l'on a

$$\Delta \Delta u = l^4 u.$$

Les deux véritables conditions au contour σ de la plaque supposée

libre ont été trouvées par Kirchhoff, et sont, en y remplaçant w par u,

$$0 = \left(\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy} + \frac{d^3u}{dy^3}\right)\sin\varphi$$
$$+ \frac{1+\theta}{1+2\theta}\frac{d}{d\sigma}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dx\,dy}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right],$$
$$0 = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\varphi + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

θ étant une certaine constante. (Voir KIRCHHOFF, 30e de ses *Vorlesungen über mathematische Physik*.)

Ces deux conditions peuvent être présentées sous une forme très simple par l'emploi des formules des nos **2**, **5**. On a en effet, en supposant l'élément dn de normale rectiligne,

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dx\,dy}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} = \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

et

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\varphi + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\varphi$$
$$= \Delta u - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi\right)$$
$$= \Delta u - \left(\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \frac{du}{dn}\frac{d\varphi}{d\sigma}\right).$$

D'après cela, si nous posons

$$\frac{1+\theta}{1+2\theta} = A,$$

les deux conditions au contour prennent cette forme très élégante

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Delta u}{dn} = -A\dfrac{d}{d\sigma}\dfrac{d\frac{du}{d\sigma}}{du}, \\[2ex] \Delta u = A\left(\dfrac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \dfrac{du}{dn}\dfrac{d\varphi}{d\sigma}\right). \end{cases}$$

9. Si nous supposons une autre solution simple

$$w = u' \sin l'^2 at,$$

nous aurons

$$\Delta\Delta u' = l'^4 u',$$

et u' satisfera sur le contour σ aux deux équations (α), dans lesquelles u sera remplacé par u'.

La forme qui vient d'être donnée aux conditions au contour permet de démontrer très facilement la formule

$$(\beta) \qquad \int uu' d\omega = 0,$$

$d\omega$ étant un élément de la surface de la plaque, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments de cette surface.

On a la formule

$$\begin{aligned}\int u\Delta\Delta u' d\omega - \int u'\Delta\Delta u d\omega \\ = \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma + \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma,\end{aligned}$$

les intégrales du second membre s'étendant à tout le contour σ. [Voir mon *Mémoire sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$, etc. (*Journal de M. Liouville*, 1869).] Posons

$$\mathrm{I} = \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma, \quad \mathrm{J} = \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma,$$

la formule précédente devient

$$(l'^4 - l^4)\int uu' d\omega = \mathrm{I} + \mathrm{J}.$$

D'après la seconde condition (α), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \mathrm{A}\int\left(\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma}\frac{du'}{dn} - \frac{d\frac{du'}{d\sigma}}{d\sigma}\frac{du}{dn}\right)d\sigma \\ &= \mathrm{A}\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{du'}{dn} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{du}{dn}\right)_{\sigma=0}^{\sigma=\lambda} - \mathrm{A}\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\frac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

λ étant la longueur de la ligne σ. La partie située en dehors du signe d'intégration prend la même valeur aux deux limites, et l'on en conclut

$$J = -A\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\frac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Posons

$$L = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} = \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} - \frac{du}{d\sigma}\frac{dv}{d\sigma},$$

et désignons par L' la même expression où u est remplacé par u', nous aurons, d'après la première condition (α),

$$I = -A\int\left(u\frac{dL'}{d\sigma} - u'\frac{dL}{d\sigma}\right)d\sigma;$$

intégrons par parties, et remarquons que la quantité située hors du signe d'intégration sera nulle; nous aurons

$$I = A\int\left(L'\frac{du}{d\sigma} - L\frac{du'}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Remplaçons L, L' par leur seconde expression, nous aurons

$$I = A\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\frac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma;$$

I est donc égal et de signe contraire à J, et l'on en conclut la formule (β).

Sur l'emploi fait par Cauchy des coordonnées σ, n dans la théorie de la lame élastique courbe.

10. Dans ses *Exercices de Mathématiques*, 1828, troisième année, p. 285 à 325, Cauchy recherche les équations de l'équilibre ou du mouvement d'une lame naturellement courbe et d'une épaisseur constante. La lame, en se déformant, est supposée rester cylindrique, et les déplacements se font normalement aux génératrices du cylindre et de la même manière dans toute section normale aux génératrices; en sorte

qu'il suffit d'examiner les déplacements dans une telle section. Cauchy représente tous les points de la lame à l'état naturel, qui sont renfermés dans cette section, au moyen de la normale abaissée de ce point sur la ligne courbe moyenne et de la longueur σ de cette courbe comprise entre une extrémité de cette ligne et le pied de la normale. Pour adopter ses notations, remplaçons les deux lettres σ, n par s et r. Dans son calcul entrent des dérivées par rapport à s et r qui montent jusqu'au quatrième ordre, sans qu'il tienne compte de cette circonstance, que les signes $\frac{d}{dr}$, $\frac{d}{ds}$ ne peuvent être intervertis sur une même expression.

Pour ce qui va suivre, je suppose que le lecteur a cet Ouvrage entre les mains.

Cauchy transforme les deux équations d'équilibre de la lame par un calcul irréprochable en les équations

$$(212)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathfrak{A}}{ds} + \frac{d\mathfrak{F}}{dr} - \frac{1}{2r}\frac{d(r^2\mathfrak{F})}{dr} + \rho\left(1 - \frac{r}{2}\right)\mathfrak{S} = 0,\\ &\frac{d\mathfrak{F}}{ds} + \frac{d\mathfrak{B}}{dr} + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{A} - \frac{d(r\mathfrak{B})}{dr}\right) + \rho\left(1 - \frac{r}{2}\right)\mathfrak{R} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (212) ne renferment en effet que des dérivées du premier ordre, par rapport à s et r, des forces élastiques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$.

Les équations (267), qui donnent les expressions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ au moyen des dérivées du premier ordre de γ, δ par rapport à s et r, sont aussi exactes.

Les formules (267) doivent être substituées dans les équations (212). Pour la formation des dérivées $\frac{d\mathfrak{F}}{dr}$, $\frac{d\mathfrak{B}}{dr}$, qui entrent dans les deux équations, remarquons que $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ renferment respectivement $\frac{d\delta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$. Or, dans la suite de son calcul, Cauchy pose

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 r + \delta_2 \frac{r^2}{2} + \ldots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 \frac{r^2}{2} + \ldots,$$

où les coefficients $\delta_0, \delta_1, \ldots, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$ ne dépendent que de s. Il dé-

veloppe de même $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ suivant les puissances de r; mais au fond il remplace les deux dérivées

$$(n) \qquad \frac{d\frac{d\delta}{ds}}{dr}, \quad \frac{d\frac{d\gamma}{ds}}{dr},$$

qui entrent dans $\frac{d\mathfrak{F}}{dr}$, $\frac{d\mathfrak{B}}{dr}$ par les séries

$$\frac{d\delta_1}{ds} + \frac{d\delta_2}{ds} r + \frac{d\delta_3}{ds} \frac{r^2}{2} + \ldots,$$

$$\frac{d\gamma_1}{ds} + \frac{d\gamma_3}{ds} r + \frac{d\gamma_3}{ds} \frac{r^2}{2} + \ldots,$$

qui ne leur sont pas égales, et qui représentent

$$(p) \qquad \frac{d\frac{d\delta}{dr}}{ds}, \quad \frac{d\frac{d\gamma}{dr}}{ds}.$$

En effet, d'après le n° 4, on peut faire $\rho_1 = r$, et l'on en conclut immédiatement que les dérivées (p) sont représentées par les développements précédents. D'autre part, on aura

$$\frac{d\delta}{ds} = h\frac{d\delta}{d\rho} = h\frac{d\delta_0}{d\rho} + h\frac{d\delta_1}{d\rho} r + \ldots,$$

$$\frac{d\left(\frac{d\delta}{ds}\right)}{dr} = h\frac{d\delta_1}{d\rho} + h\frac{d\delta_2}{d\rho} r + \ldots + \frac{dh}{dr}\left(\frac{d\delta_0}{d\rho} + \frac{d\delta_1}{d\rho} r + \ldots\right),$$

et Cauchy n'a pas tenu compte de la seconde partie de cette expression. Il en est de même pour la seconde dérivée (n).

Pour pouvoir rectifier le calcul de Cauchy dans son entier, il serait indispensable d'y introduire ρ au lieu de s; mais le calcul, déjà très compliqué, le deviendrait encore davantage. Je me propose de traiter ailleurs la question de l'équilibre et du mouvement de la lame élastique courbe.

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(DEUXIÈME NOTE);

PAR M. E. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Sur l'intégration des équations. — Nous venons de voir comment on peut résoudre toute espèce d'équations primitives par la méthode secondaire élémentaire; il nous reste maintenant à examiner comment la même méthode se prête à la résolution des équations non primitives, c'est-à-dire à l'intégration des équations qui contiennent des différences ou des différentielles de la quantité inconnue. Ici encore l'expression fondamentale (3) s'applique avec autant de facilité à ce genre d'équations qu'à celui que nous avons considéré en premier lieu.

Mais, avant d'entamer le sujet, il faut définir ce que l'on entend par intégrer une équation. On dit ordinairement qu'intégrer une équation est trouver plusieurs fonctions, ou une seule, qui satisfassent à l'équation proposée. Cette définition est complète et se trouve par suite suffisante. Cependant on admet d'habitude que la solution doit donner une expression finie; cette condition n'étant pas comprise dans la définition précédente ne présente par elle-même aucune nécessité; si cette condition est admise, elle doit forcément particulariser la forme de la solution. La marche à suivre qui paraît la plus naturelle pour

obtenir une expression finie dans une intégration, ou dans toute autre question, consiste à rechercher d'abord toutes les formes possibles qui conviennent à l'expression de la solution et à en déduire ensuite les conditions qui permettent de réduire une ou plusieurs de ces expressions à une forme finie. La *Méthode suprême* de Wronski est celle qui se prête le mieux à ce genre difficile de questions; pour l'instant nous nous contenterons de faire connaître une méthode qui permet, dans tous les cas, d'obtenir une solution utilisable en pratique; cette solution se présente ordinairement sous forme de suite indéfinie. Il faut se rendre compte que bien souvent les expressions finies que l'on obtiendrait seraient si compliquées qu'elles seraient impossibles à utiliser dans les calculs; nous en donnerons plus tard un exemple remarquable. Au contraire, la méthode générale et pratique dont nous parlons offre une utilité incontestable, car personne n'ignore qu'il existe nombre de questions, et parmi celles-ci des questions importantes, qui n'ont pu être traitées complètement, faute de moyens d'obtenir les solutions.

Voici la marche que nous allons suivre : il résulte de ce que nous avons dit précédemment que l'expression (3) est une expression générale d'une certaine fonction $F(y)$ formée avec la quantité inconnue y, laquelle est donnée par l'équation $\varphi(y) = 0$; cette équation contient en outre, dans le cas qui nous occupe, une variable indépendante x, ou plusieurs variables indépendantes, ainsi que des différences ou des différentielles de l'inconnue et de la variable. La question se trouve donc ramenée à trouver une fonction qui satisfasse au deuxième membre de l'expression (3), problème facile à résoudre comme on peut le prévoir maintenant.

On voit même que la fonction intégrale peut prendre généralement un nombre indéfini de formes essentiellement différentes; ces formes différentes dépendent de la nature des fonctions fondamentales, qui sont admises à figurer dans l'expression définitive; nous allons faire un choix de ces fonctions. On peut s'astreindre, par exemple, à n'admettre que des fonctions exponentielles, ou encore des transcendantes d'un ordre plus élevé; dans la première supposition, on pourra très rarement obtenir pour integrale une fonction finie, et dans la deuxième on pourra obtenir une fonction intégrale remplissant cette condition, dans des cas d'autant plus fréquents que l'on admettra comme fonctions fon-

damentales un plus grand nombre d'espèces de fonctions. Mais ici se présente un inconvénient très grave : c'est l'introduction d'un nombre de plus en plus grand de ces fonctions dont les propriétés principales devront être connues, et pour lesquelles des tables devront être calculées. Or, cette étude préalable, si elle était étendue à un nombre de plus en plus grand de fonctions, deviendrait bientôt matériellement impossible; on peut en juger déjà par l'étude des fonctions elliptiques et abéliennes. Cette étude, faite évidemment par des moyens analogues à ceux qui sont appliqués aux fonctions problématiques, conduit, pour être logique et pour éviter des complications très grandes, à cette conséquence que l'on ne doit pas rechercher en général de solutions finies.

Il faut, au contraire, chercher à n'admettre que le nombre le plus restreint de fonctions fondamentales, et nous allons voir que ces fonctions se réduisent seulement aux fonctions exponentielles et à leurs inverses les fonctions logarithmiques. Dans ces conditions, les intégrations sont non seulement toujours possibles, mais elles sont toujours faciles et par conséquent pratiques.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit à propos de la résolution des équations primitives, nous sommes encore conduit à distinguer dans la solution la partie essentiellement *théorique* de la partie *technique*, et ce que l'on doit chercher, c'est de réduire au minimum la partie technique de la solution au moyen des fonctions fondamentales que l'on se donne *a priori*. Quant à rechercher les conditions pour que cette partie technique s'annule toujours, en laissant alors arbitraire la nature des fonctions fondamentales admises à figurer dans la solution, cela peut être donné par la *Méthode suprême*, comme nous l'avons déjà dit, mais ce n'est qu'un problème particulier qui ne présente ordinairement pas d'utilité dans la pratique.

Il est même facile de concevoir pour quelle raison les solutions finies, en général, n'existent pas théoriquement. On sait en effet que les fonctions qui satisfont aux équations différentielles, ou aux différences finies, sont généralement des fonctions transcendantes, c'est-à-dire, suivant l'acception du mot qui signifie en dehors des conditions du temps, des fonctions dont on ne peut avoir que des valeurs de plus en plus approchées sans pouvoir jamais en obtenir la valeur exacte. Il en résulte naturellement que l'intégration d'une équation doit conduire

à une expression de forme indéfinie, laquelle ne peut se réduire à une forme finie que par l'introduction de conventions particulières, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

A cette occasion, nous devons dire que Wronski a cependant indiqué un système d'intégration finie au moyen des *facultés algorithmiques*, fonctions découvertes, il y a plus d'un siècle, par Vandermonde et désignées par lui sous le nom d'*irrationnelles d'ordres supérieurs*. Il faut remarquer que les intégrales sont alors données par une seule espèce de fonctions; cette manière d'intégrer, utile dans certaines conditions, ne permet pas de calculer les valeurs numériques des intégrales, parce qu'il faut développer les facultés et que l'on obtient alors, dans la plupart des cas, des développements non convergents; il faut donc effectuer encore une seconde transformation pour obtenir la convergence nécessaire, et l'on retombe sur des expressions auxquelles on pourrait arriver directement par d'autres méthodes. Wronski, dans sa théorie de la chaleur, a donné une équation intégrée par les facultés algorithmiques (voir *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, 1834-1835); il exprime sous forme finie, formule (54) ou (57), l'intégration d'une équation différentielle très élevée, qui donne la loi de la relation de la température intime des corps et de leur densité, et par suite la loi de la force élastique des vapeurs; mais l'Ouvrage n'ayant pas été achevé, l'auteur n'a pu faire connaître l'équation d'où il était parti.

Il n'y a pas lieu de distinguer les équations qui peuvent être intégrées de celles qui ne le peuvent pas, puisque l'on peut toujours satisfaire à une équation donnée, comme nous allons le voir. Seulement on pourra rencontrer des solutions indiquant que l'équation proposée est impossible, si elle a été formée au hasard, c'est-à-dire si elle ne répond à aucun problème que l'on puisse réellement rencontrer. Nous ne nous occuperons pas d'équations ainsi formées, car il est clair que, si l'équation ne représente rien, la solution n'ayant aucune signification, toute

---

(1) On peut voir, dans le programme de l'Ouvrage cité, l'énoncé en lettres italiques du principe fondamental de la Théorie de la chaleur; c'est donc en France, en 1835, que ce principe a été énoncé pour la première fois d'une manière bien précise; plus loin la formule (92) contient l'expression mathématique du même principe.

interprétation que l'on en ferait serait complètement arbitraire et n'aurait aucune valeur. Au contraire, les équations provenant d'un problème offrant une réalité conduisent à des solutions dont la signification est bien déterminée, et ces équations ont une formation analytique qui a été indiquée pour la première fois par Lagrange; cette origine est la seule que l'on ait à considérer ici. Wronski a donné quelques indications à cet égard; voici ce qui en est.

Les équations différentielles doivent être classées, 1° d'après leur ordre d'indétermination, 2° d'après le nombre des variables qu'elles renferment, 3° d'après l'ordre des différentielles de ces variables. Il existe d'autres classifications, mais elles sont accessoires; telles sont celles qui se basent sur le degré de la puissance à laquelle se trouvent élevées les différentielles, ou sur l'ordre d'indétermination où se trouvent les variables.

Puisque nous ne considérons que les questions présentant une entière réalité, nous admettrons nécessairement l'existence d'une ou de plusieurs équations primitives; c'est là la condition principale : les équations différentielles n'en sont par suite que des conséquences.

Soit le premier ordre d'indétermination des équations; supposons d'abord qu'il n'y ait que deux variables et que les différentielles n'entrent qu'au premier ordre : il s'agit de voir comment d'une équation primitive on peut généralement déduire une équation différentielle. Or, une pareille équation ne provient que d'une relation entre l'équation primitive et celle-ci différentiée; de plus, toute relation entre deux équations ne peut s'établir qu'en comparant deux quantités dépendant à la fois de ces équations, ce qui revient à établir l'égalité entre deux fonctions de quantités qui entrent dans les équations; soit donc $\varphi(x, y)$ une fonction comprise dans l'équation primitive que nous écrirons

$$(a) \qquad \Phi[x, y, \varphi(x, y)] = 0;$$

la fonction φ devant se trouver encore dans l'équation précédente différentiée, la relation cherchée s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations. On voit que cette fonction φ ne peut être quelconque, puisqu'elle doit subsister malgré la différentiation de Φ; cette condition se trouvera remplie si la dérivée de Φ par rapport à φ est nulle, parce

qu'alors Φ étant, pour ainsi dire, une fonction invariable de φ, la différentiation de Φ par rapport à la variable indépendante x ne peut avoir d'influence sur la fonction φ, et celle-ci se retrouvera une fois l'opération effectuée. Il faut donc que l'on ait

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0\,;$$

φ est ici une *fonction singulière*. Mais la quantité φ peut encore se retrouver dans la fonction Φ, après sa différentiation par rapport à x, si φ se réduit à une constante; celle-ci pourra être éliminée et donner lieu à la relation qui forme l'équation générale du premier ordre. En résumé, on sait qu'en différentiant l'équation primitive, ce qui donne

$$(b) \qquad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)d\varphi = 0,$$

l'élimination de φ entre cette équation et l'équation primitive ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(c) \qquad \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad d\varphi = 0.$$

Ainsi une équation différentielle du premier ordre équivaut à deux équations primitives, l'une contenant une fonction singulière $\varphi(x, y)$, l'autre une constante arbitraire.

Si la relation primitive entre deux variables contient plusieurs fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ de ces mêmes variables, de telle sorte que l'on ait

$$\Phi[x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_\mu(x, y)] = 0,$$

en prenant la différentielle totale de Φ, puis la différentielle totale de celle-ci, et ainsi de suite, en effectuant μ opérations successives, on pourra éliminer entre les μ équations différentielles et l'équation primitive les μ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, et obtenir une équation différentielle d'ordre μ. Mais, pour que cette élimination puisse se faire, il faut que la somme des termes qui contiennent les différentielles de

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, dans chacune des μ relations différentielles précédentes, soit nulle, ce qui donnera μ équations de condition auxquelles les fonctions φ doivent satisfaire; ces quantités φ y satisferont toujours si elles se réduisent à des constantes. Ainsi l'équation différentielle du $\mu^{\text{ième}}$ ordre équivaut à deux sortes d'équations primitives, l'une contenant μ constantes arbitraires, et l'autre contenant de une à μ fonctions singulières avec un nombre complémentaire de constantes arbitraires. Cela est connu.

Dans le premier ordre d'indétermination des équations renfermant trois variables, soient les deux équations

$$(d)\qquad \begin{cases} \Phi_1[x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0, \\ \Phi_2[x, y, z, \varphi_2(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0; \end{cases}$$

φ_1, φ_2 et ψ sont trois fonctions contenues dans les fonctions Φ_1 et Φ_2. On a, en différentiant,

$$(e)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\Phi_1}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi_1}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi_1}{dz}\right)dz + \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \\ \left(\frac{d\Phi_2}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi_2}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi_2}{dz}\right)dz + \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0, \end{cases}$$

et si l'on a

$$(f)\qquad \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0,$$

on pourra éliminer entre les quatre premières équations deux des trois fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi$, ou toutes les trois.

Dans le premier cas, en éliminant les deux fonctions φ_1 et φ_2 par exemple, on aura deux équations différentielles du premier ordre

$$(g)\qquad \begin{cases} \Psi_1[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0, \\ \Psi_2[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0. \end{cases}$$

Mais les relations (f) peuvent avoir lieu dans deux cas, si les fonctions

φ_1, φ_2, ψ se réduisent à des constantes, ou si l'une d'elles, ou deux ou trois sont des fonctions satisfaisant à ces relations. Si aucune de ces fonctions ne se réduit à une constante, comme il n'existe que deux relations (f), l'une des fonctions, ψ par exemple, sera une fonction arbitraire, et les deux autres, φ_1 et φ_2, seront exprimées par les relations (f) en fonction de ψ et de sa dérivée. Ainsi les deux équations différentielles du premier ordre équivalent à deux systèmes d'équations primitives, l'une où les deux équations primitives contiennent deux constantes arbitraires, et l'autre où elles contiennent une ou deux fonctions singulières φ_1 et φ_2 telles que celles-ci satisfassent aux conditions (f).

Dans le second cas, en éliminant les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ entre les quatre équations, on aura l'équation différentielle du premier ordre

$$(h) \qquad \Theta(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Cette équation équivaut encore à deux systèmes d'equations primitives entre les variables : dans l'un, les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ se réduisent à trois constantes arbitraires; dans l'autre, les équations primitives contiennent une, deux ou trois fonctions singulières satisfaisant aux conditions (f); celles-ci pouvant contenir une fonction arbitraire ψ, les équations primitives contiennent alors cette fonction arbitraire et sa dérivée, puisque, en vertu de (f), les fonctions φ_1 et φ_2 s'expriment au moyen de ψ et de sa dérivée.

Généralement, pour le premier ordre d'indétermination des équations de ν variables et d'ordre μ des différentielles, il faudrait supposer l'existence de $\nu - 1$ équations primitives contenant deux systèmes des fonctions singulières des ν variables : $\mu(\nu - 1)$ fonctions φ ordinairement différentes dans les $\nu - 1$ équations, et $\nu - 2$ fonctions ψ qui se trouvent dans chacune des équations. On aurait ainsi le système d'équations primitives

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \ldots \varphi_{1\mu}, & \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \varphi_{21}, & \varphi_{22}, & \ldots \varphi_{2\mu}, & \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{\nu-1}(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \varphi_{(\nu-1)1}, & \varphi_{(\nu-1)2}, & \ldots \varphi_{(\nu-1)\mu}, & \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0. \end{array} \right.$$

Ces $\mu(\nu - 1) + \nu - 2$ fonctions singulières peuvent se réduire toutes

à des constantes arbitraires; on aura, dans ce cas, un premier système d'équations primitives, les équations différentielles provenant de l'élimination de ces constantes entre les équations primitives et les équations que l'on en déduirait en les différentiant jusqu'à l'ordre μ. Si les fonctions singulières ne se réduisent pas toutes à des constantes, elles seront déterminées par des relations que l'on établirait facilement comme plus haut, ce qui permettrait de les éliminer entre les équations primitives et ces mêmes équations différentiées jusqu'à l'ordre μ, de manière à former le système des équations différentielles. Les équations (i) forment alors un second système d'équations primitives. On verrait dans ce cas, s'il y a moins de $\nu - 2$ constantes arbitraires, qu'on ne peut déterminer plus de $\mu(\nu - 1)$ fonctions singulières, à cause du nombre de relations de condition, qui est $\mu(\nu - 1)$, et les autres fonctions singulières sont arbitraires.

On verrait encore qu'en partant de l'un ou de l'autre système d'équations primitives, on pourrait éliminer $\mu(\nu - 1)$ constantes arbitraires ou fonctions singulières ou un plus grand nombre de ces constantes ou de ces fonctions, ce qui donnerait un système de $\nu - 1$ équations différentielles ou un nombre moindre.

Les équations aux différentielles partielles proviennent des ordres d'indétermination des équations supérieurs au premier. Nous ne pouvons donner ici des développements aussi étendus que le comporte la question de la formation des équations différentielles; on pourra consulter à ce sujet l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, d'où nous avons extrait en partie ce qui précède [1].

Enfin, il faut encore faire une remarque importante sur l'habitude que l'on a de traiter les questions d'intégration au moyen de considérations géométriques; cette méthode ne peut conduire à rien de général, par la raison que la Géométrie et l'Analyse, l'Algorithmie pour mieux dire, sont deux sciences indépendantes l'une de l'autre en principe. La première est une science qui n'admet que l'idée d'espace pour unique élément concret, et la seconde que l'idée de nombre. Ces sciences

---

[1] Nous avons indiqué ce qui précède pour bien préciser ce que nous entendons par *solutions singulières* et *fonctions singulières*: la suite exigerait, pour être développée, des notations spéciales; nous aurons occasion d'y revenir plus tard.

n'ont de commun que la partie purement abstraite; il en résulte qu'une théorie géométrique traduite en analyse ne peut donner *nécessairement* une théorie complète d'Analyse : elle ne peut le faire que d'une manière *contingente*. C'est pour cette raison que la Géométrie symbolique à laquelle on a été conduit ne peut faire faire de véritables progrès à l'Analyse. La représentation géométrique des imaginaires est également inutile tout au moins, par la raison que la forme générale des quantités algébriques est

$$a_0 + \rho a_1 + \rho^2 a_2 + \ldots + \rho^{m-1} a_{m-1},$$

au lieu de $a + b\sqrt{-1}$, ρ étant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces deux formes sont, il est vrai, équivalentes au fond, car, en supposant que l'on réduise toutes les quantités imaginaires de la première, on retombe évidemment sur la forme $a + b\sqrt{-1}$; mais cette réduction ne peut se faire arbitrairement sans faire disparaître certaines conditions du problème que l'on traite et dont il faut nécessairement tenir compte : une telle réduction peut rendre la solution très difficile, sinon impossible, puisqu'elle particularise la forme des quantités. On verra plus tard quelle est l'importance de cette remarque.

Ainsi les méthodes géométriques ne peuvent être généralement admises comme auxiliaires des méthodes algorithmiques; c'est ce que Wronski a compris le premier; en suivant ses indications, nous parviendrons à l'intégration complète des équations, sans avoir besoin de nous appuyer sur aucune considération géométrique.

Nous n'avons pas à insister davantage sur les observations qui précèdent : il suffit de les signaler pour l'instant; nous aurons occasion d'y revenir avec plus de détails dans ce qui va suivre. Nous allons maintenant entreprendre l'intégration des équations en examinant d'abord les équations différentielles ne contenant qu'une variable indépendantes, puis les équations aux différences finies dans lesquelles l'inconnue ne dépend aussi que d'une seule variable. Nous examinerons ensuite comment on peut intégrer les équations contenant des différences ou des différentielles d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, et enfin les équations simultanées primitives ou non.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NE CONTENANT QU'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Nous rappelons que, pour résoudre une équation généralement quelconque, il s'agit de trouver une fonction qui, mise à la place de l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation proposée. L'expression (2) est, comme on l'a vu, une expression générale de la quantité inconnue y qui satisfait à l'équation donnée

$$\varphi(y) = 0 \tag{12}$$

Maintenant y est considéré comme fonction d'une variable indépendante x, et la fonction φ contient, outre l'inconnue y et la variable x, les différentielles de ces deux quantités. La question se ramène donc, pour intégrer l'équation (12), à introduire dans l'expression (2) la variable x et à calculer les dérivées des divers ordres de l'inconnue y qui y entrent. Pour ce dernier objet, on est conduit à considérer généralement une fonction de l'inconnue $F(y)$, F étant une fonction donnée; on sait d'ailleurs que dans certains cas la véritable inconnue d'un problème n'est pas précisément la quantité y qui entre dans l'équation du problème, mais une fonction de cette quantité, telle que $\sin y$ par exemple; nous en avons déjà trouvé un exemple dans la résolution de l'équation transcendante que nous avons traitée plus haut. Pour cette raison, nous substituerons à l'expression (2) l'expression plus générale (3), savoir

$$F(y) = F(\omega) - \varphi(\omega)\frac{dF(\omega)}{d\varphi(\omega)} + [\varphi(\omega)]^2\frac{d\varphi(\omega)d^2F(\omega) - d^2\varphi(\omega)dF(\omega)}{2[\varphi(\omega)]^2} - \ldots$$

Nous nous proposons donc de trouver une fonction déterminée F de la quantité y donnée par l'équation différentielle (12).

Formation de l'équation réduite. — D'après ce que nous avons déjà dit, la quantité fondamentale ω qui entre dans l'expression (3) est ici une fonction de x; la fonction $F(\omega)$, également fonction de x, devra

être aussi rapprochée que possible de la fonction cherchée $F(y)$, et elle sera déterminée par une équation déjà désignée sous le nom d'*équation réduite*. Cette équation devra ainsi différer le moins possible de l'équation proposée (12); de cette manière, la fonction $\varphi(\omega)$ étant constamment réduite à sa valeur minima, l'expression fondamentale possédera le maximum de convergence.

La marche à suivre est donc ici la même que celle que nous avons indiquée dans le cas des équations primitives, en introduisant toutefois les modifications dues à la nature des équations différentielles, comme nous allons le voir.

Nous formerons l'équation réduite en introduisant dans l'équation proposée une quantité arbitraire ω, soit en coefficient, soit en exposant, de telle sorte que l'équation transformée

$$(13) \qquad \varphi(y, \omega) = 0,$$

pour $\omega = 1$, reproduise l'équation proposée, qui est, d'après cette notation,

$$(13)' \qquad \varphi(y, 1) = 0,$$

et pour $\omega = 0$ donne l'équation réduite

$$(13)'' \qquad \varphi(y, 0) = 0,$$

Cette équation devra être résoluble par des procédés ordinaires et devra ainsi différer aussi peu qu'il se pourra de l'équation (13)'; elle sera une équation différentielle de même ordre que la proposée, afin d'admettre le même genre de solution.

Or cette réduction est toujours possible; on conçoit même qu'elle puisse être faite de plusieurs manières, ce qui laisse un certain arbitraire dans cette réduction. On peut ainsi, au moyen de l'équation réduite, introduire dans la solution même de l'équation proposée diverses espèces de fonctions, généralement des transcendantes d'ordres plus ou moins élevés. Ces fonctions fondamentales, dont les propriétés devront être nécessairement bien connues, conduiront dans certains cas à des solutions finies, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Remar-

quons aussi que chacune de ces fonctions nécessitera préalablement une étude particulière, et leur usage exigera l'emploi de tables spéciales pour chacune d'elles; il est donc important de chercher à réduire ces fonctions au nombre strictement nécessaire, ce qui est d'ailleurs indispensable dans les applications.

Pour cela, comme on va le voir, l'équation réduite peut être ramenée dans tous les cas à être une équation différentielle linéaire à coefficients constants, toujours intégrable théoriquement et d'une manière finie, et cette solution permet de n'introduire que des transcendantes de la forme e^{rx}, où r est une constante, c'est-à-dire des exponentielles ou des sinus d'un ordre quelconque suivant que r sera réel ou imaginaire. Elles sont, en y joignant les logarithmes fonctions inverses des exponentielles, les seules transcendantes nécessaires; ces fonctions sont élémentaires et bien connues [1].

Ainsi, d'après cette théorie, contrairement aux opinions admises, les autres transcendantes, quelles qu'elles soient, ne peuvent se rencontrer que dans des problèmes particuliers, et rien ne conduit à les introduire nécessairement dans les calculs; au contraire, elles sont facilement exprimables au moyen des transcendantes élémentaires que nous venons de citer; nous aurons occasion de nous en rendre compte en exposant une autre méthode.

En formant une équation réduite à coefficients constants, nous obtenons dans tous les cas une réduction uniforme, ne comportant rien d'arbitraire, ce qui est un caractère des solutions théoriques, telles que Wronski les a définies. La quantité $F(w)$ formera donc encore ici la partie essentiellement théorique et finie de la solution, et la série des autres termes de l'expression (3) formera la partie technique et indéfinie, partie qui existera généralement. La solution sera considérée comme théorique, quand cette seconde partie sera aussi réduite que possible, et l'expression donnant la solution cherchée atteindra le maximum de convergence.

La formation de l'équation réduite, telle que nous l'indiquons, con-

---

[1] Les sinus d'ordres supérieurs sont cependant des fonctions encore peu connues; nous en donnerons les propriétés toutes les fois que l'occasion s'en présentera.

duit à l'intégrale générale de l'équation proposée par suite de l'introduction unique de constantes arbitraires ; quant aux solutions singulières, on pourrait les obtenir soit en les déduisant de l'intégrale générale, soit en modifiant convenablement la formation de l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Pour opérer comme nous venons de le dire, nous mettrons l'équation différentielle proposée, supposée d'ordre μ, sous la forme suivante, ce que l'on peut toujours faire,

$$(14) \qquad \frac{d^\mu y}{dx^\mu} H_\mu + \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} H_{\mu-1} + \ldots + y H_0 = \psi(x) ;$$

$\psi(x)$ est une fonction quelconque de la seule variable x et les coefficients $H_0, H_1, \ldots, H_\mu$ peuvent être des fonctions quelconques de x, de la fonction inconnue y et de ses dérivées des divers ordres, pourvu qu'ils ne dépassent pas l'ordre μ, qui est l'ordre le plus élevé.

Pour plus de simplicité, nous pourrons écrire cette équation ainsi :

$$(14)' \qquad \sum_{\mu} \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} H_\sigma = \psi(x),$$

en convenant de faire varier l'indice σ de o à μ pour obtenir tous les termes compris sous le signe Σ.

Considérons les variations de l'inconnue, correspondantes à des valeurs de la variable indépendante, comprises entre deux limites quelconques, mais déterminées, p et q. Soient y_p et y_q les deux valeurs de y correspondantes ; la fonction F variera entre les limites $F(y_p)$ et $F(y_q)$; si nous désignons par β une valeur de y telle que la quantité $F(\beta)$ soit sensiblement la moyenne entre les quantités $F(y_p)$ et $F(y_q)$, α étant la valeur de x correspondante, les valeurs α et β de x et de y sont ce que Wronski appelle *valeurs moyennes;* nous les supposerons provisoirement connues.

Appelons h_σ ce que devient le coefficient général H_σ, quand on y remplace les quantités x, y et leurs dérivées par leurs valeurs moyennes ; nous pourrons introduire la quantité arbitraire ω comme il suit, et

prendre pour l'équation transformée (13) l'équation

$$(15)\qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) = 0.$$

Car, pour $\omega = 1$, nous obtenons l'équation proposée (14), et pour $\omega = 0$ l'équation réduite à coefficients constants

$$(16)\qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} - \psi(x) = 0.$$

Tel est le moyen de former généralement l'équation réduite.

Quant à la solution de cette dernière, l'inconnue y étant ici la valeur fondamentale que nous avons dénotée par w, en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu}$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(17)\qquad h_{\mu} m^{\mu} + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

nous aurons

$$(17)'\qquad w = \Sigma_{\mu} e^{m_{\sigma} x} \left[M_{\sigma} + N_{\sigma} \int \psi(x) e^{-m_{\sigma} x} dx\right],$$

M_{σ} est une des μ constantes arbitraires de l'intégration, et N_{σ} une constante dont la valeur est

$$N_{\sigma} = \frac{1}{h_{\mu}(m_{\sigma} - m_1)(m_{\sigma} - m_2)\ldots(m_{\sigma} - m_{\mu})},$$

l'indice σ variant de 1 à μ.

Il peut être nécessaire, dans certains cas, d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation réduite, afin de lever certaines difficultés qui se présentent parfois. Pour cela on peut ajouter cette fonction arbitraire $\chi(x)$ au second membre de l'équation transformée, pour ne pas modifier la forme de la valeur fondamentale w; cette équation sera donc généralement

$$(18)\qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) - (1 - \omega)\chi(x) = 0,$$

équation qui reproduit l'équation proposée pour $\omega = 1$, et fournit l'équation réduite

$$(19)\qquad \sum_{\sigma} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} - \psi(x) - \chi(x) = 0,$$

pour $\omega = 0$. Si la fonction $\psi(x)$ est nulle, il convient de prendre pour la fonction arbitraire $\chi(x)$ l'exponentielle se^{rx}, s et r étant des constantes qu'il faut déterminer convenablement; de cette façon l'expression de la valeur fondamentale w conserve la forme qu'elle aurait dans le cas où la fonction arbitraire n'existerait pas.

Ajoutons que, si l'équation caractéristique (17) a des racines imaginaires, les exponentielles de l'expression (17) devront être remplacées par des fonctions de sinus d'un ordre plus ou moins élevé, comme l'a montré le premier M. Yvon Villarceau dans le Mémoire déjà cité; nous en verrons des exemples.

Nous avons vu que les différentielles qui entrent dans l'expression fondamentale (3) sont prises seulement par rapport à la quantité w, celle-ci étant une fonction de x qui est maintenant déterminée d'une manière générale. Pour les calculs nous remplacerons les différentielles des fonctions φ et F par leurs dérivées par rapport à w; nous aurons donc, à la place de l'expression (3), l'expression

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} F(y) &= F(w) - \varphi(w) \frac{1}{\dfrac{d\varphi(w)}{dw}} \frac{dF(w)}{dw} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\varphi(w)]^2 \frac{\dfrac{d\varphi(w)}{dw} \dfrac{d^2F(w)}{dw^2} - \dfrac{d^2\varphi(w)}{dw^2} \dfrac{dF(w)}{dw}}{\left[\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right]^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

En prenant les dérivées par rapport à w de certaines fonctions de x, que nous désignerons généralement par $f(x)$, nous aurons

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df(x)}{dw} &= \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dw}, \\ \frac{d^2 f(x)}{dw^2} &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \frac{df(x)}{dx} \frac{d^2x}{dw^2}, \\ \frac{d^3 f(x)}{dw^3} &= \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \left(\frac{dx}{dw}\right)^3 + 3 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{d^2x}{dw^2} \frac{dx}{dw} + \frac{df(x)}{dx} \frac{d^3x}{dw^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous avons de plus à calculer les dérivées de x par rapport à w, ce qui donnera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dx}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dx}},\\
&\frac{d^2x}{dw^2} = -\frac{d^2w}{dx^2}\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^3},\\
&\frac{d^3x}{dw^3} = \left[3\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - \frac{dw}{dx}\frac{d^3w}{dx^3}\right]\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Wronski a donné l'expression générale de ces dérivées pour les différents ordres; les valeurs précédentes suffisent pour l'instant.

Nous pouvons maintenant porter les valeurs des dérivées de $F(w)$ et $\varphi(w)$ dans l'expression précédente $(19)_1$; pour cela, remarquons que ces fonctions ne dépendent que de la variable x, puisque w est une fonction de x; il en résulte que, en appliquant les expressions (20) et $(21)_1$, où $f(x)$ peut représenter l'une des deux fonctions F ou φ, nous avons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
F(y) = F(w) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d(Fw)}{dx}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left[\varphi(w)\right]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right)\right.\\
&\qquad\left. - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \ldots
\end{aligned}\right.$$

De plus, on a encore besoin des dérivées, par rapport à x, prises sur la seule variable y de la fonction $F(y)$; soit $\left(\frac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right)$ la dérivée d'ordre ν, la fonction $F(y)$ étant quelconque; on peut admettre qu'elle représente la dérivée en question; par suite, l'expression (22) donne

$$(22)'\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right) = \left(\frac{d^\nu F(w)}{dx^\nu}\right) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left[\varphi(w)\right]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^{\nu+2}F(w)}{dx^{\nu+2}}\right)\right.\\
&\qquad\left. - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\right] - \ldots
\end{aligned}\right.$$

En particulier, si $F(y)$ se réduit à y, il vient

$$(22'')\quad \left\{\begin{aligned} y &= w - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx} \\ &\quad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \cdots \\ &\text{et} \\ \frac{d^\nu y}{dx^\nu} &= \frac{d^\nu w}{dx^\nu} - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{d^{\nu+1}w}{dx^{\nu+1}} \\ &\quad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^{\nu+2}w}{dx^{\nu+2}} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{d^{\nu+1}w}{dx^{\nu+1}}\right] - \cdots \end{aligned}\right.$$

Enfin, il faut encore calculer les dérivées de $F(w)$, de $\varphi(w)$ et de w par rapport à x. La forme de la fonction F n'étant pas explicitement donnée ici, bien qu'elle soit connue dans chaque cas particulier, on ne peut effectuer pour l'instant le calcul de ses dérivées; il suffirait évidemment de substituer à la quantité w sa valeur donnée par (17)', et à ses dérivées, si elles existent, les valeurs que l'on obtiendrait en prenant les dérivées successives du deuxième membre de l'expression (17)'. Cependant, w n'étant qu'une première valeur approchée de l'inconnue y, on pourra faire usage de la relation différentielle proposée (14) pour obtenir, avec la plus grande exactitude possible, les dérivées cherchées à partir de la $\mu^{\text{ième}}$.

Pour ce qui concerne la fonction φ, nous avons, d'après (14)',

$$(23)\qquad \varphi(w) = \sum_{\mu} \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} H'_\sigma - \psi(x),$$

en désignant ici par H'_σ la valeur que prend le coefficient H_σ quand on y remplace y par w; on peut éliminer la plus haute dérivée de w au moyen de l'équation réduite.

On obtient ensuite, en ne prenant la dérivée de $\varphi(y)$ que sur la variable y,

$$\left(\frac{d\varphi(y)}{dx}\right) = \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma+1}y}{dx^{\sigma+1}} H_\sigma - \sum_{\mu} \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left(\frac{dH_\sigma}{dx}\right);$$

mais, en prenant aussi la dérivée totale sur la même fonction $\varphi(y)$,

on a

$$\sum_{\mu} \frac{dy^{\sigma+1}}{dx^{\sigma+1}} H_\sigma + \sum_{\mu} \frac{dy^\sigma}{dx^\sigma} \frac{dH}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx} = 0,$$

par suite, en retranchant le premier membre de cette égalité du second membre de la précédente et changeant y en w, on obtient

$$(23)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = \sum_{\mu} \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \frac{dH'_\sigma}{dx}\right] + \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

En opérant de même, on a encore

$$(23)'' \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = &\sum_{\mu} 2\frac{d^{\sigma+1}w}{dx^{\sigma+1}}\left[\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \frac{dH_\sigma}{dx}\right] \\ &+ \sum_{\mu} \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right) - \frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right] + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}; \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. D'après ce que nous venons de dire, les dérivées $\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right)$, ... ne subsistent qu'autant que le coefficient H'_σ contient la quantité w, puisque les dérivations ne sont effectuées ici que sur des fonctions de w [1]. Dans les sommes Σ, σ varie de zéro à μ.

Enfin, pour ce qui est de la valeur fondamentale w, l'équation réduite donne, d'après (17)',

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= \sum_{\mu} e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right], \\ \frac{dw}{dx} &= \sum_{\mu} m_\sigma e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right] + \sum_{\mu} N_\sigma \psi(x), \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= \sum_{\mu} m_\sigma^2 e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right] \\ &\quad + \sum_{\mu} m_\sigma N_\sigma \psi(x) + \sum_{\mu} N_\sigma \frac{d\psi(x)}{dx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ici l'indice σ varie de 1 à μ.

---

[1] Si les coefficients H' ne sont que des fonctions de w et si $\psi(x)$ est nul, les expressions (23)', (23)'' sont nulles identiquement, et les expressions (22), (22)', (22)'' ont leurs termes infinis, sauf le premier; dans ce cas il faut recourir, pour le calcul de l'inconnue, aux formules de la *génératrice neutre*, lesquelles sont les réduites de certaines fractions continues toujours convergentes.

Si la fonction $\psi(x)$ est se^{rx}, en faisant $r = m_0$, s et r étant des constantes, et posant

$$(25)\quad \begin{cases} M_0 = \dfrac{s}{h_\mu(m_0 - m_1)(m_0 - m_2)(m_0 - m_2)\ldots(m_0 - m_\mu)} \\ \quad = \dfrac{s}{h_\mu m_0^\mu + h_{\mu-1} m_0^{\mu-1} + \ldots + h_0}, \end{cases}$$

on a

$$(26)\quad \begin{cases} w = \sum_\mu e^{m_\sigma x} M_\sigma, \\ \text{et} \\ \dfrac{d^\nu w}{dx^\nu} = \sum_\mu m_\sigma^\nu e^{m_\sigma x} M_\sigma. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que cette expression de w et celles de ses dérivées rendent identique l'équation réduite

Dans ces dernières sommes, l'indice σ varie de zéro à μ. De même qu'il a été dit plus haut, on peut, à partir de la $\mu^{\text{ième}}$ dérivée, faire usage de la relation différentielle proposée pour calculer les dérivées des ordres supérieurs, de préférence aux relations précédentes (24) ou (26), afin d'obtenir un plus haut degré d'approximation.

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction cherchée $F(y)$ est donnée exactement par l'équation réduite (19); il en résulte que, pour la valeur moyenne de y, l'expression (22) se réduit à son premier terme, et tous les autres sont nuls. Pour les valeurs voisines de la valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (22) est très convergente, et cette convergence diminue généralement à mesure que la valeur de y s'éloigne de cette valeur particulière. La valeur moyenne doit donc être choisie de telle sorte qu'elle corresponde, autant que possible, à la moyenne des variations de la fonction cherchée; la convergence de l'expression (22) se trouve ainsi à peu près la même pour les valeurs extrêmes considérées p et q de x. Quant au nombre de termes que l'on doit prendre pour obtenir la quantité cherchée, il dépend à la fois de l'approximation que l'on veut obtenir et de la variation des valeurs de y par rapport à sa valeur moyenne. Si, pour certaines valeurs assez éloignées de cette dernière, l'expression (22) n'était plus suffisamment convergente, ou même était divergente, il faudrait avoir recours aux formules (10) et (11) de la *génération neutre*

(*voir* la Note de janvier 1881), ou à la méthode d'exhaustion, ou encore à ces deux moyens à la fois.

Ici l'application de la méthode d'exhaustion se présente plutôt comme un simple procédé que comme une véritable méthode; nous conservons cependant le nom de *méthode d'exhaustion*, à cause de son origine.

Pour indiquer que l'on fait usage de la méthode d'exhaustion, nous écrirons l'expression (22) de la manière suivante :

$$(27)\qquad F(y) = F(w) - \varphi(w, \omega)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w,\omega)}{dx}\right)}\left(\frac{dF(w)}{dx}\right) - \ldots,$$

et l'on donnera à ω une valeur convenable comprise entre zéro et l'unité.

Si $\omega < 1$, $F(y)$ n'est plus alors la quantité cherchée, mais cette fonction doit être considérée comme étant une nouvelle valeur fondamentale $F(w_1)$. On calculera donc les dérivées $\frac{dF(w_1)}{dx}$, $\frac{d^2F(w_1)}{dx^2}, \ldots$, et, en donnant à ω, que nous désignerons spécialement ici par ω_1, une valeur plus grande que la première fois, on reportera la fonction $F(w_1)$ et ses dérivées dans l'expression (27), et l'on obtiendra une nouvelle valeur $F(w_2)$ sur laquelle on opérera comme on vient de le faire sur $F(w_1)$, à moins que l'on ait pu faire $\omega_1 = 1$, car dans ce cas $F(w_1)$ n'est autre que $F(y)$.

Détermination des constantes. — Nous venons de donner toutes les expressions nécessaires pour obtenir la valeur de la fonction cherchée avec autant d'approximation qu'on peut le désirer; il ne nous reste plus qu'à déterminer les constantes d'intégration et les valeurs dites *moyennes*.

Admettons que ces valeurs moyennes diffèrent des valeurs initiales, qui fixent les constantes d'intégration; la valeur initiale a de x correspondant aux valeurs respectives de y et de ses $\mu - 1$ premières dérivées $b, b', b'', \ldots, b^{(\mu-1)}$, fait connaître la quantité $F(b)$, $\frac{dF(b)}{da}, \ldots$; les expressions précédentes (22) et (22)' nous donnent alors, au moyen de la valeur fondamentale w qui contient les μ constantes $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$,

μ relations qui serviront à déterminer ces constantes. Ces relations sont μ équations transcendantes, primitives, simultanées, en prenant dans les expressions (22) et (22)′ autant de termes qu'il en faut pour avoir une approximation suffisante. Ce système peut être résolu comme nous l'indiquerons plus loin.

Connaissant donc les valeurs des constantes, qui sont fonctions des valeurs moyennes, si nous faisons, pour la valeur moyenne α de x, $\gamma = \beta$ et $\frac{d^\sigma(\beta)}{dx^\sigma} = \beta^{(\sigma)}$, nous aurons à déterminer les quantités β, β', $\beta'', \ldots, \beta^{(\mu)}$, au moyen des expressions (22)″. Mais ici ces expressions se réduisent à la valeur fondamentale donnée par l'équation réduite et à ses dérivées, et ces quantités contiennent explicitement les valeurs des constantes, lesquelles seront remplacées par leurs expressions en $\alpha, \beta, \beta', \ldots$, que nous supposons maintenant connues; nous avons donc encore à résoudre un système de μ équations primitives comme précédemment. Il est à remarquer que la dérivée $\beta^{(\mu)}$ est généralement donnée par l'équation proposée même.

Ces résolutions successives sont possibles, bien qu'elles entraînent à des calculs très compliqués, mais on peut toujours les éviter Pour cela, on peut prendre, dans la plupart des cas, les valeurs initiales pour valeurs moyennes : alors, le premier système d'équations simultanées se réduisant aux expressions provenant de l'équation réduite, les μ constantes sont données par la résolution de simples équations linéaires

Dans le cas où, pour la suite des calculs, il conviendrait de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales, on peut, pour commencer, confondre ces deux systèmes de valeurs ainsi que nous venons de le faire, et ensuite calculer comme une valeur quelconque les valeurs particulières de γ et de ses dérivées qui sont les véritables valeurs moyennes, puis considérer ces nouvelles quantités à la fois comme nouvelles valeurs initiales et comme valeurs moyennes, de telle sorte que les nouvelles constantes seront encore déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ainsi, il est toujours possible de déterminer les constantes d'intégration et les valeurs moyennes par la résolution de simples équations du premier degré, et par le calcul ordinaire de quantités inconnues au moyen de la méthode secondaire.

Il faut encore remarquer que, puisqu'il n'y a que le changement des valeurs moyennes qui distingue les deux systèmes d'équations linéaires dont nous venons de parler, il n'y a qu'à substituer les secondes valeurs moyennes dans le premier système d'équations du premier degré pour obtenir le second, de sorte qu'en réalité on n'a qu'un seul système d'équations linéaires à résoudre.

Telle est, dans ses principaux détails, l'exposition de la Méthode secondaire élémentaire, appliquée aux équations différentielles dont l'inconnue ne dépend que d'une seule variable. Quelques exemples éclairciront complètement ce qui précède.

Deuxième exemple. — Soit à déterminer deux fonctions y et z données par les relations

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} dy = -pyz\,dx + m\,dx, \\ dz = -qyz\,dx + n\,dx, \end{cases}$$

où les quantités m, n, p, q sont des constantes.

En éliminant le produit yz on obtient

$$p\,dz - q\,dy = (pn - qm)\,dx.$$

Si pour $x = a$ on a $y = b$, $z = c$, l'intégration de cette équation donne

$$(\beta)\qquad p(z - c) - q(y - b) = (pn - qm)(x - a).$$

Cette relation permet d'éliminer y ou z de l'une des équations proposées (α) et l'on a

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp(y - m), \\ \dfrac{dz}{dx} = (pn - qm)(x - a) - p(z - c) - bq(z + n). \end{cases}$$

Il suffit d'intégrer la première équation, et l'équation (β) donnera la valeur de la seconde inconnue en fonction de la première.

Formation de l'équation réduite. — Formons l'équation réduite de la

première équation (7); on voit facilement que cette équation peut être résolue par les procédés ordinaires dans plusieurs cas particuliers.

Si les quantités m, q, $(qm - pn)$ ou pn sont nulles ensemble ou séparément, il est possible d'intégrer l'équation proposée et de former, dans chacune de ces circonstances, autant d'équations réduites; examinons ces différents cas :

1° Supposons que le terme en m soit nul dans l'équation réduite, nous pourrons obtenir l'équation transformée de la manière suivante :

$$(\delta) \qquad \frac{dy}{dx} = [(qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp]y + m\omega.$$

Pour $\omega = 0$, l'équation donne la valeur fondamentale

$$(\delta)' \qquad \omega = b\frac{e^{P}}{bq\int_a^x e^{P}dx + 1},$$

en faisant

$$(\delta)'' \qquad P = \tfrac{1}{2}(qm - pn)(x - a)^2 + (bq - cp)(x - a).$$

On peut parvenir à cette intégration, qui est des plus simples, en posant $y = uv$, et l'on détermine les deux fonctions de x, u et v, de telle sorte que l'intégration soit possible. Il en serait de même pour les intégrations suivantes.

2° Transformons l'équation de manière que l'équation réduite ne contienne pas de terme en y^2; en désignant par α et β les valeurs moyennes respectives de x et de y, on peut écrire l'équation transformée

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dy}{dx} = \left\{(qm - pn)(x - a) - q\left[\beta\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\omega} - b\right] - cp\right\}y + m\omega$$

pour $\omega = 0$, on a

$$(\varepsilon)' \qquad \omega = e^{P}\left(b + m\int_a^x e^{-P}dx\right),$$

en faisant

$$(\varepsilon)'' \qquad P = \tfrac{1}{2}(qm - pn)(x - a)^2 + [(b - \beta)q - cp](x - a).$$

3° Faisons en sorte que la variable x n'existe pas dans l'équation réduite; en remplaçant x par sa valeur moyenne α, on a pour équation transformée

$$(\zeta)\qquad \frac{dy}{dx} = \left\{ qm - pn\left[\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} - a\right] - q(y-b) - cp\right\} y + m;$$

pour $\omega = 0$, on a

$$(\zeta')\qquad w = \frac{Q+R}{2q} + \frac{R\,e^{Rx}}{CR\,e^{Rx} - q},$$

en faisant

$$(\zeta'')\qquad \begin{cases} Q = bq - cp + (\alpha - a)(qm - pn), \\ R = \pm\sqrt{Q^2 + 4qm}, \\ C = \dfrac{q}{R\,e^{Ra}}\,\dfrac{2bq - Q - R + 2R\,e^{Ra}}{2bq - Q - R}. \end{cases}$$

Cette constante est déterminée par les mêmes conditions que plus haut.

4° Si nous voulons ramener l'équation au cas où l'on a $pn = 0$, écrivons l'équation transformée de la manière suivante

$$(\eta)\qquad \frac{dy}{dx} = [qm - pn\omega(x-a) - q(y-b) - cp]y + m;$$

pour $\omega = 0$, on obtient

$$(\eta')\qquad w = m(x-a) + \frac{1}{q}(bq - cp) + \frac{cp}{q}\,\frac{(cp - bq)e^{-P}}{cp\left(1 + \int_a^x e^{-P}dx\right) - bq},$$

en faisant

$$(\eta'')\qquad P = \tfrac{1}{2}qm(x-a)^2 + (bq - cp)(x-a).$$

On voit, par ces diverses manières de former l'équation réduite, que les valeurs fondamentales conduiraient à une expression de l'inconnue y très convergente, dans les cas où les coefficients de l'équation proposée se rapprocheraient suffisamment des suppositions que nous avons faites, parce qu'alors l'équation réduite différerait très peu de l'équation proposée. Cependant les solutions que nous venons

d'examiner sont compliquées, et toutes, sauf l'une d'elles, exigent que l'on effectue des quadratures pour obtenir la valeur fondamentale; ces quadratures, que l'on pourrait effectuer par un moyen quelconque, ou par la méthode secondaire même, conduiraient à un calcul assez long.

Il est donc avantageux de ne pas faire usage de ces solutions et de former l'équation réduite avec des coefficients constants [1].

Posons donc

$$(5)\qquad \begin{cases} H = (qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp, \\ h = (qm - pn)(\alpha - a) - q(\beta - b) - cp, \end{cases}$$

en désignant toujours par α et β les valeurs moyennes; nous aurons pour équation transformée

$$(5')\qquad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{H}{h}\right)^{\circ} y + m,$$

ou

$$(5'')\qquad \frac{dy}{dx} = (h + (qm - pn)(x - \alpha) - q(y - \beta))y + m,$$

et pour $\omega = 0$ nous aurons l'équation réduite

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx} = hy + m;$$

par suite, la valeur fondamentale est

$$(7)\qquad y = Ce^{hx} - \frac{m}{h},$$

C étant la constante d'intégration.

Calcul de l'inconnue. — Or, si nous supposons que les valeurs

[1] Nous ne considérons ici que la forme des équations réduites; mais il y a une considération plus importante basée sur la nature de la solution, c'est-à-dire qu'il faut savoir d'abord si l'on obtient ainsi une intégrale générale ou une intégrale singulière, et ensuite quelle est l'intégrale qui convient. Nous examinerons ceci plus loin, lors du calcul numérique.

moyennes α et β se confondent avec les valeurs initiales a et b, on a

$$h = -cp,$$

et la constante est déterminée par la relation

$$b = \frac{m}{cp} + \mathrm{C}e^{-acp},$$

qui donne

$$(\varkappa)' \qquad \mathrm{C} = \left(b - \frac{m}{cp}\right)e^{acp};$$

par suite, l'expression de w est

$$(\lambda) \qquad w = \left(b - \frac{m}{cp}\right)e^{cp(a-x)} + \frac{m}{cp}.$$

Maintenant, pour appliquer l'expression (22), dans laquelle $\mathrm{F}(y)$ devient y, c'est-à-dire

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} y = w &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{[\varphi(w)]^2}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \ldots, \end{aligned} \right.$$

il reste à calculer les dérivées de w, ainsi que celles de $\varphi(w)$.

Nous avons pour les dérivées de w prises sur l'expression ($\varkappa$)

$$(\nu) \qquad \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} = \mathrm{C}h^\sigma e^{hx}.$$

Ensuite la fonction $\varphi(w)$ étant

$$\varphi(w) = \frac{dw}{dx} - [(qm - pn)(x - a) - q(w - b) - cp]w - m,$$

on obtient, en remplaçant la dérivée de w par sa valeur,

$$(\xi) \qquad \varphi(w) = -[(qm - pn)(x - a) - q(w - b)]w;$$

puis les expressions (23)′ et (23)″ donnent ici

$$(\xi)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = (qm - pn)\,w,$$

$$(\xi)'' \qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = 2(qm - pn)\frac{dw}{dx},$$

d'où l'on tire

$$(\sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} y = w &+ \frac{(qm - pn)(x - a) - q(w - b)}{qm - pn}\frac{dw}{dx} \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{[(qm - pn)(x - a) - q(w - b)]^3}{w(qm - pn)^2}\left[\left(w\frac{d^2w}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'expression de l'inconnue; il ne reste plus qu'à remplacer w par sa valeur tirée de (λ).

Transformations relatives à la convergence. — Cette expression, calculée avec les trois premiers termes de (μ), peut ne pas être assez convergente, pour certaines valeurs de x; afin d'obtenir une plus grande approximation de l'inconnue sans calculer un quatrième terme, on peut transformer l'expression (σ) au moyen des formules (10) et (11) de la génération neutre ou appliquer la méthode d'exhaustion.

En premier lieu, les formules (11) donnent

$$y = w + \frac{A_1^2\varphi(w)}{A_1 - A_2\varphi(w)};$$

et les formules (10) donnent pour A_1 et A_2,

$$A_1 = -\frac{dw}{d\varphi(w)}$$

$$A_2 = -\frac{d^2\varphi(w)\,dw}{2[d\varphi(w)]^3},$$

ou encore, par suite du changement des différentielles en dérivées,

$$A_1 = -\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right].$$

D'après les expressions (ξ), $(\xi)'$, $(\xi)''$, on obtient donc

$$A_1 = \frac{-w'}{(qm-pn)w},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{ww''-2w'^2}{(qm-pn)^2 w^3},$$

d'où

$$(\pi)\qquad y = w - \frac{ww'^2[(qm-pn)(x-a)-q(w-b)]}{ww'(qm-pn)+\frac{1}{2}(ww''-2w'^2)[(qm-pn)(x-a)-q(w-b)]}.$$

Telle est l'expression de l'inconnue sous sa deuxième forme; il resterait encore à remplacer w par sa valeur (λ).

En second lieu, l'application de la méthode d'exhaustion conduit à l'emploi de l'expression (27) sous la forme suivante

$$(\varpi)\qquad y = w - \frac{\varphi(w,\omega)}{\left(\frac{d\varphi(w,\omega)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx} + \cdots$$

On a calculé les dérivées $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}, \cdots$; il ne reste qu'à obtenir celles de la fonction $\varphi(w,\omega)$. Mais l'équation transformée a été mise sous deux formes différentes $(\theta)'$ et $(\theta)''$; voyons les résultats auxquels conduisent ces deux formes.

Considérons d'abord la deuxième forme θ''

$$\varphi(y,\omega) = \frac{dy}{dx} - \{h + [(qm-pn)(x-\alpha) - q(y-\beta)]\omega\}y - m = 0,$$

et ne prenons que les deux premiers termes de l'expression qui précède, ce qui suffit pour montrer l'application de la méthode.

Posons

$$(qm-pn)(x-\alpha) + \beta q = K;$$

la fonction $\varphi(w,\omega)$ devient

$$(\rho)\qquad \varphi(w,\omega) = w(qw - K)\omega.$$

La première dérivée est

$$(\rho)'\qquad \left(\frac{d\varphi(w,\omega)}{dx}\right) = (qm-pn)\omega.$$

Par suite, la valeur de y devient

$$(\rho)'' \qquad y = w - \frac{w(qw - \mathrm{K})}{qm - pn}\frac{dw}{dx} + \cdots;$$

la quantité ω se trouvant éliminée, la transformation $(\theta)''$ ne permet pas d'appliquer la méthode d'exhaustion ; nous verrons la raison de cette élimination dans la méthode secondaire systématique.

Examinons maintenant la transformation $(\theta)'$; nous avons

$$\varphi(w, \omega) = \frac{dw}{dx} - h\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega} w - m,$$

ou

$$(\sigma) \qquad \varphi(w, \omega) = w\,h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right].$$

La dérivée première est

$$(\sigma)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w, \omega)}{dx}\right) = \omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)\,w,$$

et la première valeur approchée de y, w_1, est alors

$$(\sigma)'' \qquad w_1 = w - \frac{h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{dw}{dx}.$$

Pour obtenir une seconde valeur plus approchée w_2 de l'inconnue y, suivant la valeur que l'on donnera à la seconde quantité arbitraire ω, on devra faire encore usage de l'expression (ϖ), dans laquelle on substituera w_1 à w. A cet effet, les dérivées $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{d^2w_1}{dx^2}$, $\cdots$ doivent être calculées au moyen de l'expression $(22)''$, c'est-à-dire

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{\varphi(w_1\omega)}{\left(\frac{d\varphi(w_1\omega)}{dx}\right)}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots,$$

autrement

$$(\sigma)''' \qquad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{h\left[1 - \left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{\mathrm{H}'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots.$$

en faisant

$$\frac{d^2w}{dx^2} = h\left(\frac{W}{h}\right)^{\omega}\frac{dw}{dx} + \omega\left(\frac{W}{h}\right)^{\omega-1}\left(qm - pn - q\frac{dw}{dx}\right)w.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(w_1, \omega_1)$ et de ses dérivées, elles se calculent comme plus haut. Supposons $\omega_1 = 1$, pour avoir, à cette seconde approximation, la valeur de l'inconnue y, nous aurons

$$(\sigma)^{\text{IV}}\quad y = w_1 - \frac{\frac{dw_1}{dx} - [(qm - pn)(x - a) - q(w_1 - b) - cp]w_1 - m}{w_1(qm - pn)} - \frac{dw_1}{dx},$$

en déterminant w_1 et $\frac{dw_1}{dx}$, d'après $(\sigma)''$ et $(\sigma)'''$.

Troisième exemple. — Prenons encore un exemple d'intégration : soit l'équation du troisième ordre, citée par Wronski dans le Tome Ier de la *Réforme*,

$$(\alpha)\qquad x\frac{d^3y}{dx^3} - 3y^2\frac{dy}{dx} + x^3y^5\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

L'équation transformée peut s'écrire, d'après Wronski,

$$(\beta)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(x^2y^5\frac{dy}{dx}\right)^{\omega}\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\omega}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et, faisant $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$(\gamma)\qquad \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{dw}{dx} = 0.$$

On peut admettre que les valeurs initiales se confondent avec les valeurs moyennes, et que l'on ait pour

$$(\gamma)'\qquad x = 1,\quad y = 1,\quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{et de même} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1.$$

L'équation caractéristique

$$(\delta)\qquad b^3 + b^2 - 3b = 0$$

donne une racine nulle, et les autres sont

$$(\delta)' \qquad \beta = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{13}\right) \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{13}\right);$$

par suite, C_1, C_2, C_3 étant les constantes d'intégration, il vient

$$(\varepsilon) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= C_1 + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\beta x}, \\ \frac{dw}{dx} &= C_2 \beta\, e^{\beta x} + C_3 \beta\, e^{\beta x}, \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= C_2 \beta^2 e^{\beta x} + C_3 \beta^2 e^{\beta x}, \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= C_2 \beta^3 e^{\beta x} + C_3 \beta^3 e^{\beta x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

D'après les conditions qui précèdent, on a, pour la détermination des constantes, les équations

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 e^{\beta} + C_3 e^{\beta}, \\ 1 &= C_2 \beta e^{\beta} + C_3 \beta e^{\beta}, \\ 1 &= C_2 \beta^2 e^{\beta} + C_3 \beta^2 e^{\beta}, \end{aligned}$$

d'où

$$(\varepsilon)' \qquad \left\{\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta - 1)(\beta - 1)}{\beta\beta}, \\ C_2 &= \frac{\beta - 1}{\beta(\beta - \beta)e^{\beta}}, \\ C_3 &= \frac{\beta - 1}{\beta(\beta - \beta)e^{\beta}}. \end{aligned}\right.$$

Formons maintenant les quantités $\varphi(w)$, $\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$, ..., l'équation proposée donne

$$\varphi(w) = \frac{d^3 w}{dx^3} + x^2 w^5 \frac{dw}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2} - 3\frac{w^2}{x}\frac{dw}{dx},$$

et l'équation réduite permet d'éliminer la dérivée troisième de w; on a donc

$$(\zeta) \qquad \varphi(w) = \left(x^2 w^5 \frac{dw}{dx} - 1\right)\frac{d^2 w}{dx^2} - 3\left(\frac{w^2}{x} - 1\right)\frac{dw}{dx}.$$

D'après (23'), on a aussi

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{dz(w)}{dx}\right) = -2xw^5\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{w^2}{x^2}\frac{dw}{dx},$$

d'où

$$(\delta)\qquad y = w + \frac{\left(x^2w^5\frac{dw}{dx} - 1\right)\frac{d^2w}{dx^2} - 3\left(\frac{w^2}{x} - 1\right)\frac{dw}{dx}}{2xw^5\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{w^2}{x^2}\frac{dw}{dx}} + \cdots$$

les dérivées de w étant déterminées par (ε).

Introduction d'une fonction arbitraire. — On pourrait maintenant appliquer la méthode d'exhaustion comme nous l'avons fait plus haut, mais ici le calcul serait pénible, à cause de la complication de l'expression précédente; il devient alors utile de recourir à un autre moyen pour rendre cette expression plus convergente. A cet effet, nous pouvons utiliser les fonctions arbitraires; il est visible alors que, si nous prenons pour fonction arbitraire l'exponentielle e^{rx}, introduite comme nous l'avons montré dans l'équation (18), nous aurons pour w une expression de la même forme que plus haut, (ε), avec une exponentielle de plus. Nous pouvons donc disposer de la constante r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale w soit plus rapprochée de la fonction inconnue y que celle que nous venons d'obtenir (δ).

Nous prendrons ainsi pour équation transformée

$$(\iota)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(x^2y^5\frac{dy}{dx}\right)^{\omega}\frac{d^2y}{dx^2} - \left(3\frac{y^2}{x}\right)^{\omega}\frac{dy}{dx} = (1-\omega)e^{rx},$$

de sorte que l'équation réduite devient

$$(\varkappa)\qquad \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{dw}{dx} = e^{rx},$$

et la valeur fondamentale est

$$(\varkappa')\qquad w = C_1 + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\epsilon x} + R\,e^{rx},$$

en faisant

$$\mathrm{R} = \frac{1}{r(r-\beta)(r-\delta)}.$$

On peut donner à r la valeur $-\delta$, ce qui conduit à

$$\mathrm{R} = \frac{-1}{2\delta^2(\delta+\beta)}.$$

Quant aux valeurs des constantes, elles sont, quels que soient r et R,

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta-1)(\delta-1)+\mathrm{R}r(\beta+\delta-r)e^r}{\beta\delta}, \\ C_2 &= \frac{\delta-1+\mathrm{R}r(r-\delta)e^r}{\beta(\delta-\beta)e^\beta}, \\ C_3 &= \frac{\beta-1+\mathrm{R}r(r-\beta)e^r}{\delta(\beta-\delta)e^\delta}. \end{aligned}\right.$$

La fonction arbitraire modifie peu le calcul des constantes, car l'équation réduite ne diffère, pour la valeur initiale de l'équation proposée, que par la dérivée d'ordre le plus élevé entrant dans l'équation et par celles des ordres supérieurs.

Les valeurs de la fonction $\varphi(w)$ et de sa première dérivée sont

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(w) &= \left(x^2w^3\frac{dw}{dx}-1\right)\frac{d^2w}{dx^2}-3\left(\frac{w^2}{x}-1\right)\frac{dw}{dx}+e^{rx}, \\ \frac{d\varphi(w)}{dx} &= -2xw^3\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}-3\frac{w^2}{x^2}\frac{dw}{dx}+re^{rx}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$y = w - \frac{\left(x^2w^3\frac{dw}{dx}-1\right)\frac{d^2w}{dx^2}-3\left(\frac{w^2}{x}-1\right)\frac{dw}{dx}+e^{rx}}{2xw^3\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}-3\frac{w^2}{x^2}\frac{dw}{dx}-re^{rx}}+\cdots$$

En comparant cette expression (9) à la précédente (6), on voit qu'il est possible de déterminer la quantité r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale w représente mieux la fonction inconnue y que la première. Pour cela, il suffit d'égaler la quantité $\mathrm{R}e^{rx}$ au second terme de l'expression de y donnée par (6), que nous représenterons, pour

abréger, par $f(x)$, et de déterminer la valeur la plus convenable de r satisfaisant à l'équation

$$e^{rx} = r(r-\beta)(r-\delta)f(x),$$

dans les limites que l'on se sera assignées. On aura, de cette manière, la valeur de $(\varkappa)'$ de w, et l'on calculera ensuite facilement l'expression (ν) de y, puisqu'il suffit d'ajouter un nouveau terme aux termes déjà calculés de w et de ses dérivées.

Dans certains cas, ce moyen assez rapide, permettant d'obtenir des valeurs approchées de l'inconnue, devra être préféré à la méthode d'exhaustion.

L'équation caractéristique (δ) ayant toutes ses racines réelles, il n'est pas nécessaire de faire intervenir les sinus; cependant, comme il peut être utile de reconnaître certaines transformations, nous allons introduire les sinus hyperboliques dans la valeur fondamentale w.

On a généralement

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}),$$
$$\sin x = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x});$$

on en conclut

$$(\xi)\quad \left\{\begin{aligned} w = {} & C_1 + C_2(\cos\beta x + \sin\beta x) \\ & + C_3(\cos\delta x + \sin\delta x) + R(\cos rx + \sin rx) \end{aligned}\right. ;$$

de plus, si l'on met les racines β et δ sous la forme

$$\beta = -a - b, \quad \delta = -a + b,$$

en faisant $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}\sqrt{13}$, on a, d'après la valeur $(\varkappa)''$ choisie pour r,

$$r = a - b,$$

ce qui donne, en développant l'expression (ξ),

$$(\xi)'\quad \left\{\begin{aligned} w = {} & C_1 + (C_2 + C_3 + R)\cos ax\cos bx \\ & - (C_2 - C_3 + R)\cos ax\sin bx \\ & - (C_2 + C_3 - R)\sin ax\cos bx \\ & + (C_2 - C_3 - R)\sin ax\sin bx, \end{aligned}\right.$$

Il est inutile de poursuivre davantage ces calculs : l'équation proposée n'a aucune signification par elle-même; elle a été remise autrefois à Wronski pour défier ce géomètre. L'équation (α) n'offre d'autre intérêt que celui de nous avoir conduit à des transformations importantes qui se reproduisent dans les ordres plus élevés, et qui indiquent alors l'emploi des sinus d'ordres supérieurs, comme nous devrions le montrer maintenant. Mais, pour donner les applications de ces sinus, nous serions obligé d'en faire connaître certaines propriétés, ce qui nous entraînerait à une digression beaucoup trop longue; c'est pourquoi nous laisserons de côté ces applications pour l'instant, d'autant plus qu'elles ne sont pas indispensables dans la méthode dont nous nous occupons; elles le seront, au contraire, quand il s'agira de la méthode systématique.

Nous allons continuer ces intégrations en prenant pour exemple une équation contenant des différences, puis une équation aux dérivées partielles à coefficients variables; nous ferons aussi des applications numériques.

Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde;

PAR M. H. RESAL.

1. Nous rappellerons que l'on est convenu d'appeler *niveau potentiel* d'un corps électrisé la valeur constante du potentiel relatif à un point quelconque de l'intérieur du corps rapporté à l'unité de masse. L'expression analytique de ce niveau ne joue aucun rôle important dans la théorie actuelle de l'électrostatique, et c'est ce qui explique pourquoi on n'a considéré jusqu'à présent, à notre connaissance du moins, que le cas très simple de la sphère.

Il nous a semblé, cependant, qu'il y aurait quelque intérêt à étudier le cas plus général de l'ellipsoïde, et ce qui fait l'objet de cette Note.

Comme la position du centre du potentiel est indéterminée dans l'intérieur du corps, nous pouvons la faire coïncider avec celle du centre de figure O de l'ellipsoïde; et, pour ne pas faire intervenir inutilement dans nos formules un facteur constant, nous supposerons égale à l'unité, en valeur absolue, la densité de la couche électrique.

Soient

Ox, Oy, Oz les directions des trois axes principaux de l'ellipsoïde :
$2a$, $2b$, $2c$ les longueurs de ces axes;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

l'équation de la surface;

λ le rapport de similitude entre la surface extérieure de la couche électrique et celle de l'ellipsoïde.

Jusqu'à nouvel ordre, il ne nous sera pas nécessaire de considérer cette couche comme étant très mince.

Concevons un cône ayant son sommet en O, et dont l'ouverture sphérique $d\omega$ soit infiniment petite. Le cône déterminera dans la couche un élément de volume que nous pouvons diviser en d'autres éléments secondaires par des surfaces infiniment voisines, semblables à celle de l'ellipsoïde.

Soient r, $r' = ru$ les portions de l'une des génératrices du cône déterminées par l'ellipsoïde et l'une des surfaces ci-dessus. Le potentiel d'un élément secondaire sera

$$\frac{r'^2\, d\omega'\, dr'}{r'} = r^2\, d\omega \,.\, u\, du;$$

en intégrant entre les limites $u = 1$ et $u = \lambda$, nous aurons pour celui du volume déterminé dans la couche par le cône

$$\frac{(\lambda^2 - 1)}{2}\, r^2\, d\omega,$$

et pour le potentiel cherché

$$(2) \qquad V = \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int r^2\, d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde.

Soient, maintenant,

θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec Oz;

φ celui que forme, avec Ox, la projection sur le plan xOy de ce rayon.

Nous avons

$$d\omega = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$
$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

d'où, en vertu de l'équation (1),

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

par suite,

$$(3)\qquad \int r^2\,d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

Si nous posons $\cos\theta = u$, celle de ces intégrales qui se rapporte à θ devient

$$(4)\qquad \int_{-1}^{1} \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)u^2}.$$

Supposons d'abord que les trois axes de l'ellipsoïde soient inégaux et que c soit le plus petit d'entre eux et posons

$$A^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2},\quad B^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

et l'intégrale ci-dessus prend la forme

$$\frac{1}{AB}\int_{-1}^{1} \frac{d\frac{Bu}{A}}{1 + \frac{B^2u^2}{A^2}} = \frac{2}{AB}\operatorname{arc\,tang}\frac{B}{A}.$$

Il vient donc

$$\int r^2\,d\omega = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}}$$
$$\times \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}},$$

intégrale qu'il est impossible d'obtenir dans le cas général; quoi qu'il en soit, la solution du problème est ramenée à une quadrature.

2. L'intégration s'effectue complètement lorsque l'ellipsoïde est de révolution, ou si $a = b$; car alors l'intégrale (4) relative à u se réduit à

$$(5)\qquad a^2 \int_{-1}^{1} \frac{du}{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) u^2},$$

et est indépendante de φ.

La masse de la couche a pour expression

$$(6)\qquad M = \frac{4\pi}{3} (\lambda^3 - 1) a^2 c.$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer, selon que $a > c$, $a < c$.

3. *Ellipsoïde de révolution aplati ou* $a > c$. — On reconnaît facilement que l'intégrale (5) a pour valeur

$$\frac{2a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1},$$

et, en se reportant aux formules (3) et (2), on trouve

$$(7)\qquad V = 2\pi (\lambda^2 - 1) a^2 \frac{\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}.$$

Si l'ellipsoïde se réduit à une sphère ou si $c = a$, le dernier facteur de cette expression devient égal à l'unité, et l'on retrouve la formule connue

$$V = 2\pi (\lambda^2 - 1) a^2.$$

4. *Ellipsoïde de révolution allongé ou $a < c$.* — On a

$$\frac{1}{1-\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\,u} + \frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\,u}\right),$$

et l'intégrale (5) se réduit à

$$\frac{2a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}.$$

Nous avons donc

$$(8)\qquad V = \frac{2\pi(\lambda^2-1)a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}.$$

5. *Formules réduites lorsque l'on suppose que la couche électrique qui recouvre un ellipsoïde de révolution est très mince.* — Dans ce cas, λ diffère très peu de l'unité, et, en désignant par δa l'épaisseur de la couche aux sommets des axes égaux, nous avons

$$a(\lambda^2-1) = a(\lambda-1)(\lambda^1+1) = 2\,\delta a,$$
$$a(\lambda^3-1) = a(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 3\,\delta a;$$

par suite, en se reportant à la formule (6),

$$(6')\qquad M = 4\pi ac\,.\,\delta a.$$

et les formules (7) et (8) peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$(7')\qquad V = \frac{M}{c}\,\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}},$$

$$(8')\qquad V = \frac{M}{c\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{1-\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}.$$

En supposant $a = c$, les deux dernières formules donnent la suivante :

$$V = \frac{M}{a},$$

qui se rapporte à la sphère.

Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes;

PAR M. DAVID,

Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite.

Le problème de la partition des nombres consiste, comme on sait, dans la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = n.$$

Je trouve sa solution dans la loi de dérivation d'Arbogast; et, comme celle-ci n'est guère connue, je crois, que par le grand Traité de Lacroix (n° **123**), je suis obligé d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

I. Ce dernier auteur démontre que le terme général d'une fonction de série telle que

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots),$$

développée par rapport aux puissances croissantes de x, est

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n \varphi(a)}{da^n}\,\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\,\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\,\frac{a_2}{1} \\
&\quad + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\left[\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\,\frac{a_3}{1}\right] \\
&\quad + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\left[\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\,\frac{a_2^3}{[3]} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\,\frac{a_2}{1}\,\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,\frac{a_4}{1}\right] + \cdots,
\end{aligned}$$

n étant l'exposant de x dans le terme général, et la notation $\lceil n \rfloor$ désignant, pour abréger, le produit 1, 2, 3, ..., n.

Voici comment se forme cette expression :

1° La loi que suivent les premiers termes de chaque parenthèse, lesquels ne contiennent que a_1 et a_2, est évidente.

2° On obtient chacun des autres termes compris dans une parenthèse en différentiant ceux qui sont compris dans la parenthèse précédente, comme si a_2, a_3, ... étaient des fonctions de α, et si l'on avait $\frac{da_2}{d\alpha} = a_3$, $\frac{da_3}{d\alpha} = a_4$, ...; mais il ne faut faire varier au plus que deux lettres dans chaque terme : savoir celles de rang le plus avancé si elles sont consécutives, autrement ne faire varier que la dernière lettre. Chaque fois que l'une de ces lettres prend un exposant plus élevé, il faut diviser par cet exposant.

Cette opération a été représentée par la caractéristique D; une seconde opération par D^2; une troisième par D^3, et ainsi de suite. Le coefficient de x^n, dans le développement de la fonction de série, s'écrit ainsi :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\frac{a_1^n}{\lceil n \rfloor} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\frac{a_1^{n-2}}{\lceil n-2 \rfloor}\frac{a_2}{1} \\ &\quad + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\left[\frac{a_1^{n-4}}{\lceil n-4 \rfloor}\frac{a_3^2}{\lceil 2 \rfloor} + \frac{a_1^{n-3}}{\lceil n-3 \rfloor}\mathrm{D}\frac{a_2}{1}\right] \\ &\quad + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\left[\frac{a_1^{n-6}}{\lceil n-6 \rfloor}\frac{a_3^3}{\lceil 3 \rfloor} + \frac{a_1^{n-5}}{\lceil n-5 \rfloor}\mathrm{D}\frac{a_3^2}{\lceil 2 \rfloor} + \frac{a_1^{n-4}}{\lceil n-4 \rfloor}\mathrm{D}^2\frac{a_2}{1}\right] + \cdots, \end{aligned} \right.$$

expression qui met bien en évidence la propriété de tous les termes de se déduire les uns des autres.

De cette loi et de cette notation d'Arbogast on passe sans peine à l'expression suivante du terme général :

$$\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\frac{a_1^n}{\lceil n \rfloor} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\mathrm{D}\frac{a_1^{n-1}}{\lceil n-1 \rfloor} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\mathrm{D}^2\frac{a_1^{n-2}}{\lceil n-2 \rfloor} + \cdots$$

Puis, étendant la règle de dérivation que représente la caractéristique D à la fonction $\varphi(a)$, c'est-à-dire admettant que $\mathrm{D}\varphi(a)$ s'obtient par la différentiation de $\varphi(a)$, remplaçant $\frac{da}{d\alpha}$ par a_1, et considérant

$\frac{d\varphi}{da}$ et a_1 comme deux lettres consécutives, on représente ce terme général par la notation $D^n\varphi(a)$, et l'on a la formule fondamentale

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} D^n\varphi(a) &= \frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\,\frac{a_1^n}{[n]} \\ &\quad + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\,D\,\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,D\,\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]} + \ldots \end{aligned}\right.$$

D'où il résulte que le développement de la fonction de série est mis sous la forme excessivement simple

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots) &= \varphi(a) + x\,D\varphi(a) \\ &\quad + x^2\,D^2\varphi(a) + x^3\,D^3\varphi(a) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Au lieu d'ordonner le terme général $D^n\varphi(a)$ ainsi qu'on l'a fait dans l'expression (1), on peut l'ordonner comme il suit :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\,\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\,\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots \\ &\quad + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,\frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\,D\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\,D\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-4}\varphi(a)}{da^{n-4}}\,\frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\,D\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\ &\quad + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,D^2\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-4}\varphi(a)}{da^{n-4}}\,\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\,D^2\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-5}\varphi(a)}{da^{n-5}}\,\frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\,D^2\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et chaque ligne horizontale se déduit de la précédente par l'opération D.

Ce qu'il importe de remarquer, et c'est là tout l'avantage de la loi d'Arbogast, c'est que les termes que l'on en déduit s'obtiennent immédiatement et par de simples opérations mentales, sans réduction ni omission, de sorte qu'on peut en déduire le développement complet sans autre peine que celle d'en écrire les termes dans l'ordre qui en résulte. Ainsi, dans la formule (3), chaque terme se déduit du précédent par l'opération D appliquée à $\varphi(a)$; dans l'expression (4), chaque ligne horizontale se déduit de la ligne horizontale précédente, par cette même opération appliquée aux puissances de a_2 ; enfin, dans l'expression (1), sauf le premier terme compris dans chaque parenthèse, lequel s'écrit

immédiatement, les autres se déduisent de la même manière des termes compris dans la parenthèse précédente. C'est trop simple pour qu'il soit nécessaire d'en donner des exemples, qui vont d'ailleurs se présenter naturellement.

II. Cela posé, développons $D^n e^x$ par l'expression (1). En supposant $a = 0$, l'on a

$$\begin{aligned} D^n e^a = \frac{a_1^n}{[n]} + \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_3}{1} \\ + \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\frac{a_2}{1}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_4}{1} \\ + \frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\frac{a_2^4}{[4]} + \frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\left[\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2}{1}\frac{a_4}{1}\right] + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\frac{a_5}{1} \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Or on connaît une autre formule pour exprimer une fonction de série, savoir

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = \sum x^n \frac{d^{p_1+p_2+\cdots}\varphi(a)}{da^{p_1+p_2+\cdots}} \frac{a_1^{p_1}}{[p_1]}\frac{a_2^{p_2}}{[p_2]}\cdots,$$

dans laquelle le signe Σ s'étend d'abord à toutes les valeurs entières et positives de n, puis à toutes les valeurs entières et positives de p_1, $p_2, \ldots$ qui satisfont à l'équation

$$(5) \qquad p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = n.$$

On déduit de là, puisqu'on suppose $a = 0$,

$$D^n e^a = \sum \frac{a_1^{p_1}}{[p_1]}\frac{a_2^{p_2}}{[p_2]}\cdots,$$

le signe Σ ne s'étendant qu'aux valeurs $p_1, p_2, \ldots$ qui satisfont à l'équation (5). En comparant à cette formule celle écrite au commencement du paragraphe, on voit que les exposants des termes de la première donnent précisément toutes les solutions de cette équation (5), qui est celle de la partition des nombres. Ces solutions, qui s'écrivent immé-

diatement, sans calcul et sans tâtonnement, comme les termes eux-mêmes déduits de la dérivation, sont comprises dans le tableau suivant [1] (on y a omis les valeurs nulles des p, pour abréger) :

$p_1 = n$						
$p_1 = n - 2$						
$p_2 = 1$						
$p_1 = n - 4$	$p_1 = n - 3$					
$p_2 = 2$	$p_3 = 1$					
$p_1 = n - 6$	$p_1 = n - 5$	$p_1 = n - 4$				
$p_2 = 3$	$p_2 = 1$	$p_3 = 1$				
	$p_3 = 1$					
$p_1 = n - 8$	$p_1 = n - 7$	$p_1 = n - 6$	$p_1 = n - 6$	$p_1 = n - 5$		
$p_2 = 4$	$p_2 = 2$	$p_3 = 2$	$p_2 = 1$	$p_5 = 1$		
	$p_3 = 1$		$p_3 = 1$			
$p_1 = n - 10$	$p_1 = n - 9$	$p_1 = n - 8$	$p_1 = n - 8$	$p_1 = n - 7$	$p_1 = n - 7$	$p_1 = n - 6$
$p_2 = 5$	$p_2 = 5$	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_3 = 1$	$p_2 = 1$	$p_0 = 1$
	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$p_3 = 1$	$p_3 = 1$	$p_3 = 1$	

Sans égard pour la répétition, voici comment ce tableau est formé : 1° la loi suivie par les nombres compris dans les groupes de la première colonne verticale est évidente. 2° Chaque groupe d'une ligne horizontale, abstraction faite du premier, se forme, au moyen d'un des groupes de la ligne horizontale précédente, en prenant pour p_1 le même nombre diminué de l'unité, et en ne faisant varier dans les valeurs de $p_2, p_3, p_4, \ldots$ que les deux dernières, si elles sont consécutives, et la dernière, s'il en est autrement; si elles sont consécutives, diminuer l'avant-dernière de 1 et augmenter la dernière de 1, puis diminuer la dernière de 1 en introduisant une nouvelle quantité p égale à 1 et d'un indice supérieur de 1, ce qui produit deux solutions nouvelles ; si elles ne sont pas consécutives, diminuer la dernière seulement de 1 en introduisant encore une nouvelle quantité p égale à 1 et d'un indice supérieur de 1, ce qui ne produit qu'une solution nouvelle.

Il est clair que le tableau s'arrête de lui-même et que, lorsque la

[1] *Comptes rendus*, 1880, 1er semestre, p. 1344.

valeur de p_1 est nulle, il n'y a pas lieu d'en tirer un groupe dans lequel la loi indiquée donnerait pour p_1 une valeur négative.

En suivant cette marche, pour obtenir toutes les solutions il n'y a pas d'autre peine que celle de les écrire ; et ainsi l'on peut dire que la résolution complète de l'équation (5) est aussi simple que possible, puisqu'elle ne comporte pas même l'emploi d'une formule numérique.

Cela montre que, si l'on a à faire la somme de toutes les quantités que l'on obtient en remplaçant dans $\varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ les nombres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ par leurs valeurs déduites de l'équation (5), problème qu'on rencontre souvent, ce qu'il y a de plus rapide, c'est de les dériver les uns des autres par la loi précédente. On représente ainsi cette somme par la formule

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi(p_1p_2p_3\ldots) &= \varphi(n) + \varphi(n-2, 1) + \varphi(n-4, 2)\\ &\quad + \varphi(n-3, 0, 1) + \varphi(n-6, 3) + \varphi(n-5, 1, 1) + \ldots.\end{aligned}$$

Mais si l'on développe $D^n e^a$ par l'expression (4), au lieu de le développer par l'expression (1), il vient

$$\begin{aligned}D^n e^a = \frac{a_1^n}{[n]} &+ \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]} + \cdots\\ &+ \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2}{1}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_3}{1} + \cdots\\ &+ \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_4}{1} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\left[\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2}{1}\frac{a_4}{1}\right] + \frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\left[\frac{a_2}{1}\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_4}{1}\right] + \ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et l'on en conclut facilement, en considérant l'une des lignes verticales de la formule précédente, le tableau suivant, qui donne par une seconde manière toutes les solutions quand on y fait $r = 1, 2, 3, \ldots$ [1].

$p_1 = n - 2r$	$p_1 = n - 2r - 1$	$p_1 = n - 2r - 2$	$p_1 = n - 2r - 3$
$p_2 = r$	$p_2 = r - 1$	$p_2 = r - 2$	$p_2 = r - 2$ ...
	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$p_3 = 3$
		$p_1 = n - 2r - 1$	$p_1 = n - 2r - 3$
		$p_2 = r - 1$	$p_2 = r - 2$
		$p_3 = 1$	$p_3 = 1$ ...
			$p_4 = 1$
			$p_1 = n - r - 2$
			$p_2 = r - 1$ ....
			$p_3 = 1$

[1] *Comptes rendus*, 1880, 2e semestre, p. 621.

La loi est à fort peu près la même que précédemment et peut s'énoncer ainsi. En partant de la solution particulière $p_1 = n - 2r$, $p_2 = r$ de l'équation (5), on obtient toutes les solutions correspondant à ce nombre r en formant chaque groupe d'une ligne verticale au moyen d'un des groupes de la ligne verticale précédente. Pour cela il faut diminuer p_1 de l'unité et ne faire varier dans les valeurs de $p_2, p_3, p_4, \ldots$ (le surplus de l'énoncé comme précédemment).

On obtiendrait de même le développement de $\Sigma\varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ sous une seconde forme correspondant à l'expression (4) ; il paraît inutile de l'écrire.

D'ailleurs, il est clair que ces deux solutions du même problème ne diffèrent l'une de l'autre que par la façon dont elles sont ordonnées, de même que les deux expressions (1) et (4) ne diffèrent l'une de l'autre que par l'ordre dans lequel on a écrit leurs termes.

III. Je terminerai en donnant la solution de quelques problèmes que la loi d'Arbogast, étendue comme je viens de le faire, résout immédiatement :

1° C'est la maniere la plus simple d'exprimer le théorème des fonctions de fonctions.

Soit z fonction de y, y fonction de x, en regardant les coefficients différentiels

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}, \quad \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}, \quad \ldots$$

comme des quantités successives analogues aux constantes $a_1, a_2, a_3, \ldots$, considérées précédemment, on a

$$\frac{1}{[n]}\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^n z}{dy^n}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^n}{[n]} + \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} D \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} D^2 \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^{n-2}}{[n-2]} + \ldots.$$

2° Étant donnée la série

$$u = az^{\frac{p}{q}} + a_1 z^{\frac{p+1}{q}} + a_2 z^{\frac{p+2}{q}} + \ldots,$$

la série inverse est déterminée par la formule

$$\frac{z^r}{-qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \cdots.$$

En différentiant cette série par rapport à a, elle prend une forme encore plus simple :

$$\frac{u}{p^q r} \frac{dz^r}{du} = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr}{p}} + \mathrm{D}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr+1}{p}} + \mathrm{D}^2\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr+2}{p}} + \cdots.$$

C'est la solution du problème qu'on appelait autrefois le *retour des suites*.

3° Soit l'équation algébrique

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par s_n la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines, on a

$$\frac{s_n}{n} = -\mathrm{D}^n \log a,$$

en ayant soin de faire dans le développement $a = 1$.

Par l'expression (4) cette formule se développe comme il suit :

$$\begin{aligned}(-1)^n \frac{s^n}{n} = \frac{a_1^n}{n} &- a_1^{n-2} \frac{a_2}{1} + (n-3) a_1^{n-4} \frac{a_2^2}{[2]} - (n-4)(n-5) a_1^{n-6} \frac{a_3^3}{[3]} + \cdots \\ &+ a_1^{n-3} \mathrm{D} \frac{a_2}{1} - (n-4) a_1^{n-5} \mathrm{D} \frac{a_2^2}{[2]} + (n-5)(n-6) a_1^{n-7} \mathrm{D} \frac{a_3^3}{[3]} + \cdots \\ &- a_1^{n-4} \mathrm{D}^2 \frac{a_2}{1} + (n-5) a_1^{n-6} \mathrm{D}^2 \frac{a_2^2}{[2]} - (n-6)(n-7) a_1^{n-8} \mathrm{D}^2 \frac{a_3^3}{[3]} + \cdots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et chaque ligne horizontale se déduit de la précédente par l'opération D, qui, ainsi que nous l'avons dit, fournit des termes que l'on écrit immédiatement sans calcul.

4° Pour le développement d'une puissance de série, on a

$$(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m = a^m + x \mathrm{D} a^m + x^2 \mathrm{D}^2 a^m + \ldots.$$

Dans le cas particulier de $m = -1$, il vient

$$D^n a^{-1} = \frac{(-1)^n}{a}\left(\frac{a_1^n}{a^n} - \frac{D a_1^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{D^2 a_1^{n-2}}{a^{n-2}} + \cdots\right),$$

et cette formule donne un moyen pour calculer les nombres de Bernoulli, car ceux-ci sont, comme on sait, les coefficients du développement de la fonction de série

$$\left(1 + \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right)^{-1}.$$

5° Les quantités que nous désignons par $D^n a^m$ s'expriment sous forme de déterminant. Par exemple, pour $n = 5$, on a

$$D^5 \frac{a_m}{m} = \frac{a^{m-5}}{1.2.3.4.5} \begin{vmatrix} a_1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & (m-1)a_1 & -2a & 0 & 0 \\ 3a_3 & (2m-1)a_2 & (m-2)a_1 & -3a & 0 \\ 4a_4 & (3m-1)a_3 & (2m-2)a_2 & (m-3)a_1 & -4a \\ 5a_5 & (4m-1)a_4 & (3m-2)a_3 & (2m-3)a_2 & (m-4)a_1 \end{vmatrix}.$$

et la loi est assez évidente pour qu'il ne soit pas nécessaire d'écrire ce déterminant dans le cas général.

Si l'on suppose $m = 0$, il faut remplacer $\frac{a_m}{m}$ par $\log a$; on a

$$-D^5 \log a = a^{-5} \begin{vmatrix} a_1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a \\ 5a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

C'est la formule de Waring mise sous forme de déterminant.

6° Si l'on veut calculer les nombres de Bernoulli, on a, par ce qui précède, pour le troisième nombre,

$$B_3 = \frac{1}{1.2^6.3^5.4^4.5^3.6^2.7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5.4 & 5.4.3 & 5.4.3.2 & 0 \\ 1 & 6 & 6.5 & 6.5.4 & 6.5.4.3 & 6.5.4.3.2 \\ 1 & 7 & 7.6 & 7.6.5 & 7.6.5.4 & 7.6.5.4.3 \end{vmatrix};$$

la loi est évidente. Ce déterminant se calcule avec la plus grande facilité, en retranchant d'abord la première ligne de toutes les autres, ce qui réduit l'ordre du déterminant de 1 : en retranchant dans le nouveau déterminant le double de la première ligne de la seconde, le triple de cette même ligne de la troisième, et ainsi de suite, ce qui réduit encore l'ordre de 1, etc. En même temps que l'on fait cette opération, la plus grande partie du coefficient disparaît.

7° Étant données les deux équations algébriques

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a = 0,$$
$$b x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0,$$

l'expression littérale de leur résultante R est donnée par la formule

$$R = a^n b^m + D a^n D b^m + D^2 a^n D^2 b^m + \ldots + D^{mn} a^n D^{mn} b^m,$$

les coefficients numériques de chaque terme restant à déterminer. Un théorème connu donnait bien déjà cette forme littérale, mais il n'y a qu'à chercher à développer quelques termes par ce théorème pour reconnaître bien vite que son emploi est presque impossible, même pour des degrés peu élevés.

8° Je ferai, en dernier lieu, remarquer que l'on peut encore étendre la signification de la caractéristique D.

Soit le produit de deux fonctions de série

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\psi(b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = [\varphi(a) + x\,\mathrm{D}\varphi(a) + x^2\,\mathrm{D}^2\varphi(a) + \ldots] \\
&\qquad \times [\psi(b) + x\,\mathrm{D}\psi(b) + x^2\,\mathrm{D}^2\psi(b) + \ldots] \\
&\quad = \varphi(a)\psi(b) + x[\varphi(a)\,\mathrm{D}\psi(b) + \psi(b)\,\mathrm{D}\varphi(a)] \\
&\qquad + x[\varphi(a)\,\mathrm{D}^2\psi(b) + \mathrm{D}\varphi(a)\,\mathrm{D}\psi(b) + \psi(b)\,\mathrm{D}^2\varphi(a)] + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on pose, en général,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^n\varphi(a)\psi(b) &= \varphi(a)\,\mathrm{D}^n\psi(b) \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi(a)\,\mathrm{D}^{n-1}\psi(b) + \mathrm{D}^2\varphi(a)\,\mathrm{D}^{n-2}\psi(b) + \ldots,
\end{aligned}$$

on pourra écrire plus simplement

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\psi(b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = \varphi(a)\psi(b) + x\,\mathrm{D}\varphi(a)\psi(b) + x^2\,\mathrm{D}^2\varphi(a)\psi(b) + \ldots.
\end{aligned}$$

L'équation qui sert ici à définir la quantité $\mathrm{D}^n\varphi(a)\psi(b)$ rappelle l'équation connue du Calcul différentiel qui devient

$$\mathrm{D}^n\varphi(x)\psi(x) = \varphi(x)\,\mathrm{D}^n\psi(x) + \mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{D}^{n-1}\psi(x) + \ldots,$$

lorsqu'on remplace le symbole $\frac{d^n}{1.2.3\ldots n\,dx^n}$ par D^n.

Ce rapprochement est d'ailleurs plus complet encore, car la formule (3) avec cette notation n'est pas autre que la formule

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = \varphi(a + a_1 x + \ldots) + x\,\mathrm{D}\varphi(a + a_1 x + \ldots) + x^2\,\mathrm{D}^2\varphi(a + a_1 x + \ldots) + \ldots
\end{aligned}$$

quand, dans les coefficients différentiels, on fait $x = 0$; ou, en d'autres

termes, on a

$$D^n \varphi(a) = \frac{d^n}{1.2.3\ldots n\,dx^n} \varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

en faisant $x = 0$ dans le second membre.

Lacroix a dit dans la préface de son grand Ouvrage : « Le calcul d'Arbogast a peut-être été jugé trop défavorablement. » Je désire que les quelques problèmes que je viens de résoudre fassent partager cette opinion au lecteur.

Les solutions des problèmes indiqués sous les n^os **2**, **5**, **6**, **7**, **8** me paraissent nouvelles; les autres se trouvent plus ou moins dans Lacroix

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence (¹);

PAR M. R. CLAUSIUS.

(Extrait et annoté par la Rédaction.)

Divers auteurs ont établi différentes formules réciproques se rapportant à l'influence mutuelle de deux corps conducteurs de l'électricité. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de donner une formule très générale qui comprend, comme cas particuliers, plusieurs des formules précédentes.

Soient

$(C_1), (C_2), \ldots, (C_n)$ m corps conducteurs qui agissent les uns sur les autres par influence;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces corps à la suite d'une première charge;

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ les niveaux potentiels correspondants;

$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ et $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ les équivalents des Q et V pour une seconde charge.

La formule qu'il s'agit de démontrer est la suivante :

$$\text{I}\quad V_1\mathfrak{Q}_1 + V_2\mathfrak{Q}_2 + \ldots + V_n\mathfrak{Q}_n = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2 + \ldots + \mathfrak{V}_n Q_n.$$

(¹) WIEDEMANN, *Annales de Chimie et de Physique*; 1877, p. 493 et suiv.

ou plus simplement, en employant une notation connue,

$$\Sigma V \mathfrak{Q} = \Sigma \mathfrak{V} Q. \tag{I_a}$$

Concevons un espace limité par les surfaces des conducteurs et par celle d'une sphère d'un rayon aussi grand que l'on voudra, et qui enveloppe tous les corps.

Soient

$d\tau$ un élément de volume de cet espace ;
$d\omega$ un élément de l'une ou de l'autre des surfaces qui le déterminent ;
du un élément de la normale intérieure au point correspondant à $d\omega$.

La formule de Green devient

$$\int V \frac{d\mathfrak{V}}{du} d\omega + \int V \Delta \mathfrak{V}\, d\tau = \int \mathfrak{V} \frac{dV}{du} d\omega + \int \mathfrak{V} \Delta V\, d\tau \text{ [1]}. \tag{1}$$

La première et la troisième intégrale de cette formule se rapportent à la surface totale qui détermine l'espace considéré, et les deux autres au volume de cet espace.

Mais, comme il n'y a pas d'électricité dans le même espace, de la façon dont les charges électriques sont effectuées, nous avons

$$\Delta V = 0, \quad \Delta \mathfrak{V} = 0,$$

et l'équation ci-dessus se réduit à la suivante :

$$\int V \frac{d\mathfrak{V}}{du} d\omega = \int \mathfrak{V} \frac{dV}{du} d\omega. \tag{2}$$

Si le rayon R de la sphère est extrêmement grand, les portions de V

---

[1] Nous rappellerons la notation suivante :

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$ H. R.

et de $\mathfrak{V}$ relatives à sa surface sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$, et les dérivées $\frac{d\mathfrak{V}}{du}$, $\frac{dV}{du}$ de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ [1].

D'où il suit que les intégrales de l'équation (2) peuvent être considérées comme se rapportant uniquement à la surface totale des conducteurs.

Soit $d\omega_i$ un élément $d\omega$ de la surface du conducteur (C_i).

En remarquant que V_i et $\mathfrak{V}_i$ sont constants à la surface de ce corps comme dans son intérieur, l'équation (2) devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &V_1\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_1+V_2\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_2+V_3\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_3+\ldots\\ &\quad=\mathfrak{V}_1\int\frac{dV}{du}d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int\frac{dV}{du}d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int\frac{dV}{du}d\omega_3+\ldots\end{aligned}\right.$$

Si h_i et $\mathfrak{h}_i$ désignent les densités électriques superficielles du conducteur (C_i) qui se rapportent respectivement à la première et à la seconde charge, on sait que

$$\frac{dV_i}{du}=-4\pi h_i,\quad \frac{d\mathfrak{V}_i}{du}=-4\pi\mathfrak{h}_i,$$

et, au lieu de l'équation (3), on a la suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &V_1\int\mathfrak{h}_1\,d\omega_1+V_2\int\mathfrak{h}_2\,d\omega_2+V_3\int\mathfrak{h}_3\,d\omega_3+\ldots\\ &\quad=\mathfrak{V}_1\int h_1\,d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int h_2\,d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int h_3\,d\omega_3+\ldots.\end{aligned}\right.$$

---

[1] En effet, lors de la première charge, par exemple, on a, pour R extrêmement grand avant de le supposer infini,

$$V=-\frac{1}{R}\Sigma Q_i,$$

$$\frac{dV}{du}=\frac{1}{R^2}\Sigma Q_i.$$

H. R.

Or, on a

$$\mathfrak{Q}_i = \int \mathfrak{h}_i \, d\omega_i, \quad Q_i = \int h_i \, d\omega_i,$$

et la formule (1) se trouve ainsi démontrée.

Applications. — 1° Supposons que (C_i) se trouve en communication avec la Terre, nous aurons

$$V_i = 0, \quad \mathfrak{V}_i = 0.$$

Maintenant admettons qu'en chargeant ce corps il ne reçoive pas d'électricité du dehors, mais seulement un partage inégal d'électricité par influence : sa surface sera couverte en partie d'électricité positive et en partie d'électricité négative, de telle sorte que la masse totale des deux électricités sera nulle. Nous aurons ainsi

$$Q_i = 0, \quad \mathfrak{V}_i = 0.$$

Donc, *les corps qui, lors des deux charges, sont en communication avec la terre ou qui sont isolés sans charge initiale ne donnent aucun terme dans l'équation* (1).

2° Admettons maintenant, et dans tout ce qui suit, à l'exception de (C_1) et (C_2), que les autres corps remplissent l'une ou l'autre des conditions ci-dessus, l'équation (1) se réduit à la suivante :

$$(5) \qquad V_1 \mathfrak{Q}_1 + V_2 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2.$$

Supposons : 1° que (C_1) et (C_2) soient d'abord isolés sans électricité initiale ; 2° que, à la première charge, (C_1) reçoive la quantité d'électricité E, par l'influence de laquelle (C_2) atteindra le niveau potentiel V_2 ; 3° que, à la seconde charge, (C_2) reçoive la quantité d'électricité E développée dans (C_1), et par suite le niveau potentiel $\mathfrak{V}_1$; nous aurons

$$Q_2 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1 = 0, \quad Q_1 = \mathfrak{Q}_2 = E;$$

l'équation (5) donne alors

$$(6) \qquad V_2 = \mathfrak{V}_1.$$

Ainsi, *le niveau potentiel qui naît dans* (C_2) *quand* (C_1) *seul a été chargé est égal à celui qui naît dans* (C_1) *quand on effectue l'opération inverse et que les deux charges sont égales.*

3° Supposons que, à la première charge, (C_1) se trouve au niveau potentiel K, tandis que (C_2) est en communication avec la terre, et reçoive par influence la quantité d'électricité Q_2; que la seconde charge (C_2) se trouve au niveau potentiel K, tandis que (C_1), restant en communication avec la terre, reçoive par influence la quantité d'électricité $\mathfrak{Q}_1$; nous aurons

$$V_2 = 0, \quad \mathfrak{V}_1 = 0, \quad V_1 = \mathfrak{V}_2 = K,$$

et la formule (5) donne

$$\mathfrak{Q}_1 = Q_2. \tag{7}$$

Ainsi, *la quantité d'électricité qui, sous l'influence de la charge de* (C_1), *s'est accumulée sur* (C_2) *et celle qui s'est accumulée sur* (C_1) *par l'influence de la charge* (C_2) *sont égales entre elles lorsque les niveaux potentiels des corps chargés sont égaux.*

On peut tirer encore bien d'autres conséquences de l'équation (1).

Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier;

PAR M. H. RESAL.

L'unique édition (1822) de la *Théorie de la chaleur* de l'illustre Fourier [1] est épuisée depuis bien des années. Les volumes, en nombre restreint, dont elle se composait, ont été absorbés en grande partie par des pays étrangers, surtout par l'Allemagne, d'où certainement ils ne nous reviendront plus. Cet Ouvrage ne se trouve, à Paris, que dans quelques bibliothèques ouvertes au public, et dans des bibliothèques spéciales destinées exclusivement à des catégories déterminées de personnes.

La plupart des bibliothèques municipales et universitaires de province n'en possèdent pas.

A la suite de ventes de bibliothèques particulières, on en trouve de temps à autre un exemplaire dans le commerce, mais la plupart de nos géomètres ne sont pas en situation d'en faire l'acquisition, en raison du prix élevé auquel il est porté. Aussi le chef-d'œuvre de l'une de nos plus grandes gloires scientifiques n'est-il généralement connu de nos jeunes générations que dans certaines parties, purement analytiques, introduites dans les traités modernes de Calcul intégral [2].

---

(1) Jean-Baptiste-Joseph Fourier est né à Auxerre le 29 mars 1768, et mort à Paris, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, le 16 mars 1830.

(2) Voir notamment le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. J.

Aussi ai-je reconnu, depuis longtemps, l'utilité que présenterait la publication d'un extrait des parties essentielles de la théorie de Fourier; je ne songeais pas à entreprendre moi-même ce travail, mais quelques-uns de mes amis m'ont engagé à m'exécuter, et j'aurais eu mauvaise grâce à ne pas me rendre à leurs désirs.

Toutefois, je n'ai pas cru devoir suivre Fourier pas à pas sur les points suivants : 1° au lieu de déduire l'expression du flux de chaleur dans un corps homogène de la considération d'un mur indéfini, je l'ai établie directement en partant de la loi du rayonnement particulaire à travers un élément plan ; 2° j'ai posé les équations en coordonnées cylindriques et sphériques du mouvement de la chaleur dans toutes leurs généralités, au lieu de me restreindre à des cas particuliers; 3° j'ai supprimé les développements métaphysiques auxquels Fourier s'est livré sur la chaleur, et qui ne sont plus conformes aux idées actuelles des physiciens; 4° j'ai également supprimé ses études préliminaires, qui ont précédé le développement en série trigonométrique d'une fonction périodique, et finalement la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'intégrales définies.

Pour éviter toutes recherches au lecteur, j'ai donné en note au bas de la page les différentes intégrales et les formules dont on a besoin, en en donnant des démonstrations ou plus simples ou plus rigoureuses que celles qui se trouvent dans la *Théorie de la Chaleur,* démonstrations empruntées à divers géomètres qui sont arrivés après Fourier.

J'ose espérer que ce Commentaire, une fois compris, facilitera la lecture des Ouvrages suivants, que l'on ne saurait trop recommander : 1° *Théorie mathématique de la chaleur,* par S.-D. Poisson [1] (1835) ;

Bertrand (2e Vol., 1870); le *Traité de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (1876); le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Sturm (1873); le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. J.-A. Serret (1880).

[1] En dehors de digressions sur le rayonnement, le refroidissement et sur l'intégration des équations aux différentielles partielles, Poisson ne s'est principalement occupé que du mouvement de la chaleur dans la sphère, indépendamment de toute hypothèse sur la répartition de la température initiale intérieure et sur la loi de la variation de la température du milieu ambiant avec la position des éléments de la surface avec lesquels il est en contact. Il fait ensuite l'application de ses formules au mouvement de la chaleur à l'intérieur et à la surface de la

2° *Cours de Physique mathématique*, par M. Émile Mathieu (¹) (1873) : 3° *Leçons sur la Théorie mathématique de la chaleur* (1861), par M. G. Lamé (²).

§ I. — *Généralités.*

1. *Du flux de la chaleur.* — Soient

$d\varpi$, $d\varpi'$ les volumes de deux éléments matériels très voisins m, m' d'un corps solide homogène ;

V_1, V'_1 leurs températures, la première étant censée inférieure à la seconde ;

r la distance des deux éléments ;

$F(r)$ une fonction de la distance r, dépendant de la nature du corps, qui décroît très rapidement quand r augmente, et devient insensible ou nulle quand r atteint ou dépasse une certaine limite r_1, très petite et du même ordre de grandeur que les intervalles intermoléculaires.

Une induction théorique tirée des résultats de l'expérience conduit à représenter par

$$F(r)(V'_1 - V_1)\, d\varpi\, d\varpi'\, dt$$

la quantité de chaleur envoyée par m' à m dans le temps dt, l'excès de température $V'_1 - V_1$ étant nécessairement très petit, en raison de la continuité que présentent les phénomènes naturels.

---

terre. Ces deux questions avaient déjà été traitées à peu près de la même manière par Laplace dans le 4e Volume de la *Mécanique céleste*.

(¹) M. Émile Mathieu a notamment ajouté deux chapitres importants à la Théorie mathématique de la chaleur, l'un qui se rapporte à l'équilibre de cylindres indéfinis de différentes formes, et l'autre à l'équilibre de température de l'ellipsoïde.

(²) Lamé, abandonnant le chemin battu, a abordé la Théorie du mouvement de la chaleur, non plus dans l'hypothèse d'un solide homogène, mais plus généralement dans celle d'un corps cristallisé. Comme il y a peu de connexité entre cet Ouvrage et celui de Fourier, je ne crois pas devoir en dire plus.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; $d\omega$ un élément superficiel compris dans le corps et appartenant à un plan indéfini (P) parallèle à zOy.

Pour obtenir la quantité de chaleur ε qui traverse $d\omega$ dans le temps dt, il suffit de faire la somme des quantités de chaleur envoyées par les molécules m' du corps situées d'un côté de (P) à celles des molécules m, situées de l'autre côté de ce plan, pour lesquelles les droites m, m', rencontrent $d\omega$ dans l'intérieur de son périmètre.

Soient

x, y, z les coordonnées du centre de gravité G de $d\omega$;
V la température en ce point;
$x + l, y + h, z + k$ les coordonnées de m;
$x + l', y + h', z + k'$ celles de m'.

D'après le principe élémentaire admis plus haut, les longueurs l, h, k, l', h', k' sont très petites, et nous pourrons négliger leurs puissances supérieures à la première, leurs produits deux à deux, etc., ce qui revient à poser

$$V_1 = V + \frac{dV}{dx} l + \frac{dV}{dy} h + \frac{dV}{dz} k,$$

$$V'_1 = V + \frac{dV}{dx} l' + \frac{dV}{dy} h' + \frac{dV}{dz} k'.$$

On a donc, pour la quantité de chaleur cherchée,

$$\varepsilon = dt \left[\frac{dV}{dx} \int (l' - l) F(r) \, d\varpi \, d\varpi' + \frac{dV}{dy} \int (h' - h) F(r) \, d\varpi \, d\varpi' + \frac{dV}{dz} \int (k' - k) F(r) \, d\varpi \, d\varpi' \right].$$

Par suite du groupement symétrique des particules du corps par rapport à la parallèle en G à Ox, particules qui peuvent être considérées comme ayant le même volume, on voit qu'à une valeur de r correspondront deux systèmes de h, h', k, k' identiques, mais affectés de signes contraires; il résulte de là que les deux dernières intégrales de l'expression ci-dessus de ε sont nulles, et que l'on a simplement

$$\varepsilon = dt \frac{dV}{dx} \int F(r) (l' - l) \, d\varpi \, d\varpi'.$$

Déterminons d'abord la portion ε' de ε qui se rapporte aux molé-

cules m' et m, pour lesquelles la distance r reste constante en grandeur et en direction. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les molécules m' sont situées au-dessous de $d\omega$ par rapport au plan yOz censé horizontal. Ces molécules déterminent un cylindre oblique parallèle à r, ayant pour base $d\omega$; de sorte que l'on peut prendre

$$d\varpi' = d\omega\, dl';$$

d'ailleurs on a la relation

$$l - l' = r\cos(r, x),$$

et la limite de l' est $-r\cos(r, x)$; il vient donc, en effectuant une intégration par rapport à l' entre o et cette limite,

$$\varepsilon' = -dt\frac{dV}{dx}F(r)\,r^2\cos^2(r, x)\,d\omega\, d\varpi,$$

et, par suite,

$$\varepsilon = -dt\frac{dV}{dx}d\omega\int F(r)\,r^2\cos^2(r, x)\,d\varpi.$$

Cette intégrale s'étend à toutes les molécules m situées au-dessus de $d\omega$ et à toutes les valeurs de r comprises entre o et r_1, et par conséquent c'est une constante α qui ne dépend que de la nature du corps. Nous avons ainsi

$$(1) \qquad \varepsilon = -\alpha\frac{dV}{dx}d\omega\, dt.$$

La constante α est essentiellement positive, attendu que $\frac{dV}{dx}$ est négatif et ε positif, puisque le mouvement de la chaleur ne peut avoir lieu que de la partie la plus chaude du corps vers la partie la plus froide; elle a reçu le nom de *coefficient de conductibilité intérieur*.

Si nous considérons la quantité de chaleur envoyée par m' à m comme une force dirigée de la première de ces molécules vers la seconde, et que nous transportions toutes les forces semblables parallèlement à elles-mêmes en G, leur résultante sera ε, et, en raison du groupement symétrique des molécules par rapport à la normale en G à $d\omega$, elle sera dirigée suivant cette normale.

Le *flux de chaleur*, qui, à un instant donné, se rapporte à un élément $d\omega$, est la quantité de chaleur qui traverse cet élément rapportée

à l'unité de surface et à l'unité de temps. Dans les conditions ci-dessus, le flux de chaleur

$$X = -\alpha \frac{dN}{dx} \tag{2}$$

peut être représenté par une droite perpendiculaire à $d\omega$ ou à Ox. Nous dirons aussi que X est le *flux de chaleur au point* G estimé parallèlement à Ox.

2. *Propriété générale du flux de chaleur relatif à un point déterminé d'un corps homogène à un instant quelconque.* — Soient

mx, my, mz trois axes rectangulaires partant d'un point m du solide;
$ma = dx$, $mb = dy$, $mc = dz$ des longueurs infiniment petites portées respectivement suivant ces axes à partir de m;
$d\omega$ l'aire du triangle élémentaire abc;
λ, μ, ν les angles formés par la normale à cet élément avec mx, my, mz;
N le flux de chaleur qui se rapporte au même élément;
X, Y, Z les flux de chaleur en m, parallèles aux trois axes.

La quantité de chaleur qui pénètre dans le temps dt dans le tétraèdre $abcm$ par les faces $bmc = d\omega \cos\lambda$, $cma = d\omega \cos\mu$, $amb = d\omega \cos\nu$, a pour expression

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu).$$

En en retranchant la quantité de chaleur $N\, d\omega\, dt$ qui s'échappe par abc, il reste

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu - N).$$

Mais cette dernière quantité de chaleur ne serait employée qu'à élever d'une quantité infiniment petite la température du tétraèdre qui est du troisième ordre; elle est donc nulle, et nous avons ainsi

$$N = X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu. \tag{3}$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité de la droite $\overline{mN}$ qui représente N. L'équation (3) revient à la suivante

$$\overline{mN} = X \frac{\xi}{mN} + Y \frac{\eta}{mN} + Z \frac{\zeta}{mN},$$

d'où

$$\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X\chi + Y\eta + Z\zeta,$$

ou encore

$$\left(\chi - \frac{X}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{Y}{2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{Z}{2}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{4}.$$

On voit ainsi que, si, à un instant déterminé, on fait varier l'orientation de l'élément $d\omega$, 1° *le lieu des points* N *est une sphère passant par le point* m; 2° *il y a une position de l'élément pour laquelle le flux atteint une valeur maximum que nous désignerons sous le nom de* flux principal; 3° *le flux de chaleur estimé suivant une droite quelconque est la projection du flux principal sur cette droite*; 4° *le flux principal est la résultante géométrique de trois flux à angle droit* (¹).

3. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectangulaires.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires auxquels on rapporte un solide homogène dans lequel la chaleur est en mouvement.

Considérons un parallélépipède élémentaire ayant son sommet en m et pour arêtes dx, dy, dz. La quantité de chaleur qui, dans le temps dt, pénètre dans la face $dy\,dz$ qui passe par m a pour expression

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt \frac{dV}{dx},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}\, dx\right),$$

d'où, pour la différence,

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz\, \frac{d^2V}{dx^2}.$$

(¹) Le flux principal est normal à la surface isotherme passant par m à l'instant considéré. En effet, on a, par exemple,

$$\cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\dfrac{dV}{dx}}{\sqrt{\dfrac{dV^2}{dx^2} + \dfrac{dV^2}{dy^2} + \dfrac{dV^2}{dz^2}}},$$

ce qui est bien le cosinus de l'angle formé par Ox par la surface $V = \text{const}$.

En ajoutant cette expression à celles que l'on en déduit en changeant x en y et z, on trouve que la quantité de chaleur qui reste dans l'élément est

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right).$$

Mais cette quantité a été employée à élever de $\frac{dV}{dt}\, dt$ la température du volume $dx\, dy\, dz$, ou à produire l'effet calorifique

$$\beta\, dx\, dy\, dz \frac{dV}{dt}\, dt,$$

en désignant par β la chaleur spécifique du corps rapportée au volume. Si l'on égale cette expression à la précédente, et si l'on pose

$$(4) \qquad K^2 = \frac{\alpha}{\beta},$$

on trouve

$$(5) \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{1}{K^2} \frac{dV}{dt}.$$

Lorsque la température en chaque point du corps varie avec le temps, on dit que *le mouvement de la chaleur est varié*, et l'équation (1) est celle de ce mouvement.

Quand la température reste constante en chaque point du corps, on dit qu'elle est *stationnaire* ou que *le mouvement de la chaleur est uniforme*. Dans ce cas, on a

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

et l'équation (5) se réduit à

$$(5') \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

4. *Conditions relatives à la surface.* — La fonction V, qui représente la température au point (x, y, z), ne doit pas seulement vérifier l'équation aux différences partielles (5) ou (5'), il faut encore qu'elle satisfasse à la condition relative à la surface, dont nous allons maintenant nous occuper.

Comme, dans ce qui suit, nous ne considérerons que des corps placés dans des milieux dont la température est uniforme, nous pourrons, pour plus de simplicité, substituer à la température intérieure du corps son excès sur celle du milieu ambiant, ce qui revient, en définitive, à changer l'échelle thermométrique en prenant pour o la température du milieu.

Soient dr un élément de la normale menée au point m de la surface du corps, mesuré à partir de ce point; $d\omega$ l'élément de la surface en m.

La quantité de chaleur qui s'échappe par $d\omega$ dans le temps dt est (1)

$$-\alpha\frac{dV}{dr}\,d\omega\,dt.$$

En admettant que V soit assez petit pour que la loi de Newton relative au rayonnement soit admissible, la quantité de chaleur rayonnée par $d\omega$ dans le temps dt est la forme $hV\,d\omega\,dt$, h étant une constante qui ne dépend que de l'état de la surface et de la nature du milieu, et qui a reçu le nom de *coefficient de conductibilité extérieure*. Nous avons donc

$$-\alpha\frac{dV}{dr}\,d\omega\,dt = hV\,d\omega\,dt,$$

ou

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \tag{6}$$

en posant

$$\frac{h}{\alpha} = \frac{1}{n}. \tag{7}$$

La condition (6) devra être transformée en raison du système de coordonnées dont on aura fait choix.

Revenons aux coordonnées rectangulaires.

Soient

$$f(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

l'équation de la surface, et

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

On a

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right),$$

et la condition (6) prend la forme

$$(9) \qquad \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right) + \frac{V}{a} = 0.$$

Ainsi, pour qu'une intégrale de l'équation (5) ou (5') soit admissible, il faut qu'après l'avoir substituée dans l'équation (9) on obtienne un résultat compatible avec l'équation (8).

Il est facile de vérifier que l'équation (9) n'est qu'une conséquence de la formule (3) du n° **2**, en supposant dans cette dernière

$$X = -\alpha\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\alpha\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}, \quad N = hV.$$

5. *Condition relative à l'état initial dans le cas du mouvement varié de la chaleur.* — A l'instant pris pour origine du temps, la température en chaque point du corps ne dépendra que de sa position ou de ses coordonnées. On pourra donc la représenter par une fonction de la forme

$$F(x, y, z),$$

et qui est censée donnée.

Ainsi, en supposant que l'on ait satisfait à l'équation (5) et aux conditions (8) et (9), il faut encore, pour que la solution obtenue soit admissible, qu'elle satisfasse à cette nouvelle condition

$$(10) \qquad V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0.$$

6. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées cylindriques.* — L'équation qu'il s'agit de trouver pourrait se déduire de l'équation (5) par une transformation de coordonnées, mais il est bien plus simple d'y arriver directement.

Soient r la distance à l'axe Oz d'un point quelconque m du solide

dont l'ordonnée est z; ψ la longitude ou l'angle formé par le plan méridien mOz avec le plan zOx.

Un élément de volume peut être considéré comme étant déterminé par trois couples de surfaces orthogonales, savoir : 1° deux cylindres circulaires ayant Oz pour axe et r, $r + dr$ pour rayons; 2° deux plans méridiens qui forment avec le plan zOx les angles ψ et $\psi + d\psi$; 3° deux plans parallèles au plan xOy, et dont les ordonnées sont z et $z + dz$.

La quantité de chaleur qui entre pendant l'instant dt dans l'élément de volume par la face située sur la surface du cylindre de rayon r est

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dz \frac{dV}{dr},$$

et celle qui sort par la face opposée

$$-\alpha\, dt\, d\psi\, dz \left(r\frac{dV}{dr} + \frac{d}{dr} r\frac{dV}{dr} dr\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, dr\, d\psi\, dz \left(r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr}\right).$$

La chaleur qui entre par la face située dans le plan méridien dont la longitude est ψ est

$$-\alpha\, dt\, dr\, dz \frac{dV}{r\, d\psi},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$-\alpha\, dt \frac{dr\, dz}{r}\left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2} d\psi\right),$$

d'où, pour la différence,

$$b \qquad \alpha\, dt \frac{dr\, dz\, d\psi}{r} \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

Enfin, par les faces correspondant aux ordonnées z, $z + dz$, il entre

et sort respectivement les quantités de chaleur

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr \frac{dV}{dz},$$

$$\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr \left(\frac{dV}{dz} + \frac{d^2V}{dz^2}\, dz\right),$$

dont la différence est

$$(c) \qquad \alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr\, dz \frac{d^2V}{dz^2}.$$

La quantité de chaleur retenue par l'élément ou la somme des expressions (a), (b), (c) a servi à élever de $\frac{dV}{dt}\, dt$ sa température ou à produire l'effet calorifique $\beta r\, d\psi\, dz\, dr \frac{dV}{dt}\, dt$.

En établissant l'égalité et se reportant à la convention (4), on trouve

$$(11) \qquad r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} + r\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{1}{r}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r}{k^2}\frac{dV}{dt}.$$

En supposant dans cette équation $\frac{dV}{dt} = 0$, on obtiendra celle qui se rapporte au mouvement uniforme.

7. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées sphériques.* — Soient

r la distance d'un point m quelconque du corps à l'origine O;
θ sa colatitude ou l'angle mOz;
ψ sa longitude ou l'angle formé par le plan mOz avec le plan zOx.

Nous déterminerons un élément de volume par les intersections de : 1° deux sphères ayant O pour centre, et r, $r + dr$ pour rayons; 2° deux cônes de révolution autour de Oz, dont les demi-ouvertures sont θ, $\theta + d\theta$; 3° deux plans méridiens dont les longitudes sont ψ, $\psi + d\psi$.

Les quantités de chaleur qui entrent et sortent respectivement par les éléments de surfaces sphériques de rayons r et $r + dr$ sont respec-

tivement

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, r\, d\theta \frac{dV}{dr} = -\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r\frac{dVr}{dr} - Vr\right),$$

$$-\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r\frac{dVr}{dr} - Vr + r\frac{d^2Vr}{dr^2}dr\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, d\theta\, dr \sin\theta\, r\frac{d^2Vr}{dr^2}.$$

Les éléments situés sur les surfaces coniques déterminées par les angles θ, $\theta + d\theta$ donnent de même

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr \frac{dV}{r\, d\theta} = -\alpha\, dt\, d\psi\, dr \sin\theta \frac{dV}{d\theta},$$

$$-\alpha\, dt\, d\psi\, dr \left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dV}{d\theta}d\theta\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(b) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, dr\, d\theta \frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dV}{d\theta}.$$

Enfin les faces situées dans le méridien dont les longitudes sont ψ, $\psi + d\psi$, donnent

$$-\alpha\, dt\, r\, d\theta\, dr \frac{dV}{r\sin\theta\, d\psi} = -\alpha\frac{d\theta\, dr}{\sin\theta}\frac{dV}{d\psi},$$

$$-\alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2}d\psi\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(c) \qquad \alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta}\, d\psi \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

La somme des expressions (a), (b), (c) devant être égale à

$$\beta\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr\, r\, d\theta \frac{dV}{dt}\, dt,$$

il vient

$$(12) \qquad \sin\theta\, r\frac{d^2Vr}{dr^2} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2}\frac{dV}{dt}\sin\theta.$$

Si nous posons $\mu = \cos\delta$, cette équation se met sous la forme suivante :

$$(13) \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

Telle est l'équation qui a servi de point de départ à Laplace dans ses recherches sur la chaleur centrale du globe, et dont Poisson a fait usage plus tard dans sa Théorie de la chaleur.

Dans le cas où le mouvement de la chaleur est uniforme, on a simplement

$$(13') \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

§ II. — *Mouvement de la chaleur dans un solide dont les dimensions sont très petites et dans un solide indéfini dans lequel la direction du mouvement de la chaleur est constante.*

8. *Équation du mouvement de la chaleur dans le solide.* — Nous supposerons que le solide est limité par une surface canal, que la section génératrice ω du volume est assez petite pour que, dans son étendue, la température puisse être considérée comme constante, enfin que la section ω et son périmètre σ ont un centre de gravité commun. Nous désignerons sous le nom de *directrice* le lieu des centres de gravité, qui, avec ω, définit la forme du solide.

Les théorèmes de Guldin, généralisés par Sturm, seront implicitement invoqués dans ce qui suit.

Soit x la longueur d'un arc quelconque de la directrice mesurée à partir d'une origine déterminée A_0.

La différence entre les quantités de chaleur reçue et rejetée par les deux sections normales correspondant à x et $x + dx$ est

$$(a) \qquad = \alpha\omega\, dt\frac{dV}{dx} + \alpha\omega\, dt\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) = \alpha\omega\frac{d^2V}{dx^2}dx\, dt,$$

et représente la quantité de chaleur qui reste dans l'élément de volume $\omega\, dx$.

Le milieu ambiant en absorbe la partie

$$(b) \qquad \sigma\, dx\, h V\, dt.$$

L'autre a pour effet d'augmenter de $\frac{dV}{dt}\, dt$ la température du volume $\omega\, dx$, et a, par suite, pour expression

$$(c) \qquad \beta\omega\, dx \frac{dV}{dt}\, dt.$$

Si l'on pose

$$(d) \qquad a^2 = \frac{\alpha\omega}{\sigma h},$$

et si l'on exprime que l'expression (a) est égale à la somme des expressions (b) et (c), on trouve, en se rappelant la signification de K^2,

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{a^2} + \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

On reconnaîtra facilement que cette équation s'applique à un prisme ou cylindre d'une section quelconque, sans restriction relativement aux positions respectives des centres de gravité de la section et de son périmètre.

9. *Mouvement uniforme de la chaleur.* — Supposons que la section correspondant à l'origine A_0 de x soit maintenue à une température constante V_0, sous l'action d'une source de chaleur ayant cette température; qu'une autre section ω_1 en un point A_1 dont la position est définie par $x = x_1$ soit maintenue à une température constante V_1 sous l'action d'une seconde source de chaleur, et ainsi de suite. Au bout d'un temps plus ou moins long, les températures deviendront sensiblement stationnaires, et nous pourrons supposer $\frac{dV}{dt} = 0$. L'équation (1) se réduit alors à la suivante,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{a^2},$$

qui a pour intégrale

$$V = Me^{\frac{x}{a}} + Ne^{-\frac{x}{a}}, \tag{3}$$

en désignant par M et N deux constantes arbitraires.

L'équation (3) fera connaître la température dans une section située entre A_0 et A_1, correspondant à x, en déterminant les constantes au moyen des conditions

$$V_0 = M + N, \quad V_1 = Me^{\frac{l}{a}} + Ne^{-\frac{l}{a}}.$$

Entre A_1 et A_2, on peut supposer que x a pour origine le premier de ces points, et nous aurons de même

$$V_1 = M + N, \quad V_2 = Me^{\frac{l}{a}} + Ne^{-\frac{x_2}{a}},$$

et ainsi de suite.

Supposons, en particulier, que le solide ne soit soumis qu'à l'action de la source de la chaleur à la température V_0 disposée à l'une de ses extrémités, et que l'autre extrémité rayonne dans le milieu ambiant. Désignons par l la longueur totale de la directrice. Nous aurons d'abord

$$V_0 = M + N, \tag{e}$$

puis la condition

$$\frac{dV}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour } x = l,$$

d'où l'on tire, en se reportant à l'équation (3),

$$Me^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) - Ne^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right) = 0. \tag{f}$$

Des équations (e) et (f) on déduit

$$M = \frac{V_0 e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)},$$

$$M = \frac{V_0 e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}.$$

On voit que, si la longueur l est très grande, on a sensiblement

$$M = 0, \quad N = V_0$$

et

$$V = V_0 e^{-\alpha},$$

formule dont les conséquences sont trop connues pour que nous pensions devoir nous y arrêter.

10. *Mouvement varié de la chaleur dans le solide lorsque sa directrice est fermée dans les deux sens ou qu'elle est infinie.* — Nous faisons cette restriction que la directrice est fermée ou infinie pour ne pas avoir égard aux conditions relatives aux extrémités, qui compliqueraient considérablement la solution du problème que nous avons à résoudre.

Supposons que le solide, après avoir été échauffé d'une manière inégale dans ses différentes parties, soit ensuite placé dans un milieu à la température zéro, et proposons-nous de déterminer la loi suivant laquelle décroît la température à mesure que le temps augmente.

En égalant à zéro le second membre de l'équation (1), on a

$$\frac{dV}{dt} + \frac{K^2}{a^2} V = 0,$$

d'où, en désignant par U une constante arbitraire,

$$V = U e^{-\frac{K^2}{a^2} t}. \tag{4}$$

Si nous considérons maintenant U comme une fonction de x et de t, et si nous substituons cette expression dans l'équation précitée, nous trouvons

$$K^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dU}{dt}. \tag{5}$$

Désignons par p un nombre quelconque, par α une constante arbitraire, par T une fonction de t seul, et posons

$$U = T \cos p(x - \alpha).$$

En substituant cette expression dans l'équation (5), on trouve

$$\frac{dT}{dt} = -K^2 p^2 T,$$

d'où, en appelant A une constante arbitraire,

$$T = A e^{-K^2 p^2 t}.$$

L'équation (5) sera ainsi satisfaite par

$$U = A e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha). \tag{6}$$

Supposons maintenant que, A et α conservant les mêmes valeurs, on fasse croître p de quantités infiniment petites égales à dp; l'équation (5) sera encore satisfaite par

$$A e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha)\, dp.$$

La somme de toutes les expressions semblables entre deux limites quelconques de p vérifiera encore cette équation; mais nous prendrons ici pour limites $-\infty$ et ∞; nous aurons ainsi la solution

$$U = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha)\, dp, \tag{7}$$

qui est plus générale que la solution (6). Cette expression peut se mettre sous la forme suivante

$$U = A \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}} \text{ (1)}. \tag{8}$$

---

(1) Avant de montrer comment on arrive à cette intégrale, considérons d'abord la suivante :

$$2P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\, dp,$$

dans laquelle γ désigne une constante. Il est évident que l'on a

$$P = \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\, dp.$$

Soit k une constante arbitraire, $\gamma p = k z$, z étant une variable auxiliaire sub-

Supposons que l'on fasse varier α d'une manière continue, et posons

$$A = f(\alpha)\, d\alpha,$$

en désignant par f une fonction arbitraire. La formule (8) devient

$$U = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4k^2 t}} d\alpha.$$

La somme de tous les termes semblables compris entre les limites

---

stituée à p; il vient

$$P = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty e^{-k^2 z^2} k\, dz.$$

Multiplions cette équation par $2e^{-\gamma^2 k^2}$ et intégrons ensuite par rapport a k, entre les limites $k = 0$, $k = \infty$; nous aurons

$$2P \int_0^\infty e^{-\gamma^2 k^2} dk = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k^2(\gamma^2 + z^2)} dz\, dk^2$$

ou

$$2P^2 = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \frac{dz}{\gamma^2 + z^2} = \frac{\pi}{2\gamma^2},$$

d'où

$$P = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma},$$

et

$$(a) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Revenons maintenant à l'équation (7) et posons

$$\gamma^2 = K^2 t, \quad x - \alpha = 2\chi,$$

χ étant une variable auxiliaire substituée à x. Il vient, abstraction faite du facteur λ,

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} \cos 2p\chi\, dp,$$

d'où

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{1}{\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} \sin 2p\chi\, d(\gamma p)^2,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{2\chi U}{\gamma^2};$$

$\alpha = -\infty$ et $\alpha = \infty$ sera encore une solution de l'équation (5), d'où

$$(9) \qquad U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}} d\alpha.$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme, en posant

$$\frac{x-\alpha}{2K\sqrt{t}} = -\beta,$$

β étant une variable que l'on substitue à α. Il vient alors

$$(10) \qquad U = 2K \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\beta) e^{-\beta^2} d\beta.$$

En portant cette valeur dans l'équation (4), après y avoir remplacé β par α, on trouve

$$(11) \qquad V = 2K e^{-\frac{K^2}{a^2}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Soit $F(x)$ la fonction donnée de x qui représente la loi de la répartition de la température initiale, ou la valeur de V pour $t = 0$. On a

$$F(x) = 2Kf(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2Kf(x)\sqrt{\pi},$$

---

on déduit de là, en appelant U_0 la valeur U correspondant à $\chi = 0$,

$$U = U_0 e^{-\frac{\chi^3}{\gamma^3}}.$$

Or

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Donc,

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{-\frac{\chi^3}{\gamma^3}}.$$

En substituant à χ et γ leurs valeurs en fonction de x et de Kt, on retombe sur la formule (8) du texte.

d'où

$$f(x) = \frac{F(x)}{2K\sqrt{\pi}},$$

et l'équation (11) devient

$$(12) \qquad V = \frac{e^{-\frac{K^2}{a^2}t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (^1).$$

Telle est la solution complète du problème.

Dans le cas où tous les points du solide se seraient trouvés primitivement à la même température V_0, on aurait

$$F(x) = V_0;$$

par suite,

$$V = V_0 e^{-\frac{K^2}{a^2}t}.$$

11. *Mouvement de la chaleur dans un solide indéfini en tous sens, lorsque la direction de ce mouvement est constante.* — Considérons dans le solide des plans parallèles infiniment rapprochés les uns des autres, et supposons que la température initiale soit uniforme dans chaque plan, tout en pouvant varier d'un plan à un autre. Il est évident que, au bout d'un temps quelconque, la température restera encore uniforme dans chaque plan. On est ainsi ramené à considérer une droite indéfinie A_0x normale aux plans, et dont la température initiale serait représentée par $F(x)$; comme il n'y a pas d'échange de chaleur latérale, on devra supposer $h = 0$ ou $a^2 = \infty$, en se reportant à la valeur (a) du n° 8.

En faisant cette supposition dans l'équation (12) du numéro précédent, on a, pour exprimer que la loi du mouvement varie dans le solide,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

---

(1) Cette formule est due à Laplace.

§ III. — *Mouvement varié de la chaleur dans une sphère.*

12. Considérons une sphère homogène, dont le rayon est a, dans laquelle, à une certaine époque prise pour origine du temps, les couches sphériques élémentaires qui la constituent avaient chacune une température constante, mais pouvant varier de l'une à l'autre couche, le solide ayant été placé dans un milieu à 0°. Au bout d'un temps quelconque, la température sera encore constante dans toute l'étendue d'une couche.

En nous reportant à l'équation (12) du n° 7 et supposant nulles les dérivées partielles relatives à μ et ψ, on a

$$\frac{d^2 rV}{dr^2} = \frac{r}{k^2}\frac{dV}{dt}. \tag{1}$$

En posant

$$rV = U, \tag{2}$$

cette dernière équation se réduit à la suivante,

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{1}{k^2}\frac{dU}{dt}. \tag{3}$$

La condition relative à la surface est (n° 4)

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{u} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a. \tag{4}$$

En remarquant que V, par suite, U doit décroître indéfiniment quand t augmente, on est conduit à poser

$$U = ue^{m^2\frac{k^2}{a^2}t},$$

en désignant par m un nombre quelconque et par u une fonction de r. Si l'on substitue cette expression dans l'équation (3), on trouve

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{m^2}{a^2}u.$$

d'où, en désignant par A et B deux constantes arbitraires,

$$u = \mathrm{A}\sin m\frac{r}{a} + \mathrm{B}\cos m\frac{r}{a}.$$

Mais on doit avoir $\mathrm{B} = 0$, car autrement $\frac{u}{r}$, par suite $\frac{\mathrm{U}}{r} = \mathrm{V}$ seraient infinis pour $r = 0$. Nous poserons donc simplement

$$u = \mathrm{A}\sin m\frac{r}{a}.$$

Les équations (3) et (2) sont donc respectivement satisfaites par

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}e^{-m^2\frac{k^2}{a^2}t}\sin m\frac{r}{a},$$

et

$$(5) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{A}\frac{e^{-m^2\frac{k^2}{\mu^2}t}}{r}\sin m\frac{r}{a}.$$

En portant cette dernière expression dans la condition (4), on trouve

$$(6) \qquad \operatorname{tang} m = \frac{m}{1 - \frac{a}{n}}.$$

Cette équation en m a une infinité de racines égales et de signes contraires; mais, en changeant m en $-m$, A en $-\mathrm{A}$ dans l'équation (6), on obtiendrait le même résultat. Il nous suffit donc de considérer les racines positives m_1, m_2, ... censées rangées par ordre de grandeurs à partir de la plus petite.

En désignant par A_i la constante arbitraire qui correspond à la racine m_i, nous satisferons en même temps à l'équation (1) et la condition (4), en posant

$$(7) \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{r}\sum \mathrm{A}_i e^{-m_i^2\frac{k^2 t}{a^2}}\sin m_i\frac{r}{a}.$$

Soit $\mathrm{F}(r)$ la fonction donnée qui représente la température initiale

de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t = 0$; nous aurons, pour déterminer les coefficients A_i, l'équation

$$(8) \qquad F(r) = \frac{1}{r}\sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}.$$

Si nous posons

$$\varphi(r) = rF(r),$$

cette équation revient à la suivante

$$(9) \qquad \varphi(r) = \sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}.$$

Soit m_j un terme quelconque de la série des m_i; multipliant l'équation (9) par $\sin m_j \frac{r}{a} dr$, et intégrant entre les limites $r = 0$, $r = a$, on trouve

$$\int_0^a \varphi(r) \sin m_j \frac{r}{a} dr = \sum A_i \int_0^a \sin m_i \frac{r}{a} \sin m_j \frac{r}{a} dr$$
$$= a \sum \frac{A_i}{(m_i^2 - m_j^2)} (m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_j).$$

Or, de l'équation (6) on déduit

$$\frac{\operatorname{tang} m_i}{m_i} = \frac{\operatorname{tang} m_j}{m_j},$$

d'où

$$m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_i = 0.$$

Il suit de là que, si j diffère de i, le coefficient de A_i sera nul, et que le seul coefficient qui peut avoir une valeur déterminée doit correspondre à $j = i$; dans ce cas on a

$$\int_0^a \varphi(r) \sin m_i \frac{r}{a} dr = A_i \int_0^a \sin^2 m_i \frac{r}{a} dr = \frac{a A_i}{2}\left(1 - \frac{1}{2 m_i} \sin 2 m_i\right),$$

d'où, en remplaçant $\varphi(r)$ par $rF(r)$,

$$(10) \qquad A_i = \frac{2}{a} \int_0^a \frac{rF(r) \sin m_i \frac{r}{a} dr}{1 - \frac{1}{2 m_i} \sin 2 m_i}.$$

L'équation (7) donne ainsi, pour la solution complète du problème,

$$(11)\qquad V = \frac{2}{a}\sum \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{r} \frac{\int_0^a r\,F(r)\sin m_i \frac{r}{a}\,dr}{1 - \frac{1}{2m_i}\sin 2m_i} e^{-m_i^2 \frac{k^2}{a^2} t}.$$

Au bout d'un temps suffisamment grand, cette série se réduira sensiblement à son premier terme, qui correspond à la plus petite m_1 des valeurs des m_i.

13. *Hypothèse d'une température initiale uniforme dans l'intérieur de la sphère.* — Supposons que la sphère, avant d'être exposée au refroidissement, ait été placée assez longtemps dans un milieu dont la température V_0 est constante pour que tous ses éléments aient pris très sensiblement cette température; nous aurons

$$F(r) = V_0,$$

et l'équation (11) donne, en effectuant l'intégration,

$$V = 2V_0 \sum \frac{1 - m_i \cot m_i}{m_i \operatorname{cosec} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}} e^{-m_i^2 \frac{k^2}{a^2} t}.$$

Si l'on remarque que l'équation (6) donne

$$m_i \cot m_i = 1 - \frac{a}{h},$$

l'expression précédente se met sous cette forme plus simple,

$$(12)\qquad V = 2\frac{a}{h} V_0 \sum \frac{e^{-m_i^2 \frac{k^2}{a^2} t}}{m_i \operatorname{cosec} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}}.$$

Nous allons maintenant étudier deux cas extrêmes, en désignant dorénavant par V_i la partie de V qui correspond à m_i.

1° *Le rayon de la sphère est très petit.* — Supposons que le rapport $\frac{a}{n}$ soit assez petit pour que l'on puisse négliger ses puissances supérieures à la première. L'équation (6) devient

$$\text{(6')} \qquad \operatorname{tang} m = m\left(1 + \frac{a}{n}\right),$$

et l'on voit que sa première racine m_1 est de l'ordre de $\frac{a}{n}$. Si donc on remarque que l'on a, aux termes du cinquième ordre près,

$$\operatorname{tang} m_i = m_1\left(1 + \frac{m_1^2}{3}\right),$$

l'équation (6') donne

$$m_1^2 = \frac{3a}{n}.$$

Nous avons donc aussi, pour le dénominateur du terme de la série (12) qui correspond à V_1,

$$\frac{m_1}{\sin m_1} - \cos m_1 = \frac{2}{3} m_1^2 = \frac{2a}{n};$$

de plus,

$$\frac{\sin m_1 \frac{r}{a}}{m_1 \frac{r}{a}} = 1 - \frac{1}{6} \frac{m_1^2 r^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{an}.$$

On a donc

$$\text{(13)} \qquad V_1 = V_0\left(1 - \frac{r^2}{2an}\right) e^{-\frac{3K^2}{an} t}.$$

Les racines m_i à partir de m_1 deviennent de plus en plus grandes, et l'équation (6') donne notamment, en négligeant $\frac{a}{n}$ devant l'unité,

$$m_2 = 4,59483.$$

Les rapports $\frac{V_2}{V_1}, \frac{V_3}{V_1}, \ldots$ diminuent donc très rapidement quand t

croît, et deviendront négligeables au bout d'un certain temps; la valeur (13) de V_1 pourra alors être considérée comme représentant la température V.

2° *Le rayon de la sphère est très grand.* — Supposons que le rayon a soit assez grand pour que l'unité soit négligeable devant le rapport $\frac{a}{n}$. L'équation (6) se réduit alors à la suivante

$$(6'') \qquad \operatorname{tang} m = m\frac{n}{a}.$$

Si l'on néglige les puissances de $\frac{a}{n}$ des ordres supérieurs au premier, cette équation donne,

$$m = i\left(1 - \frac{n}{a}\right)\pi.$$

En partant de là, on formera facilement les expressions de V_1, V_2, ...; mais, comme les rapports $\frac{V_1}{V_2}$, $\frac{V_1}{V_3}$, ... décroissent rapidement quand t augmente, V se réduira bientôt à son premier terme, ou sensiblement du moins, c'est-à-dire à

$$V = 2V_0 e^{-\frac{k^2}{\rho^2}t}\frac{\sin\frac{\pi r}{a}}{\pi\frac{r}{a}}.$$

§ IV. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cylindre circulaire indéfini.*

14. Nous supposerons que la température initiale est constante dans chacune des couches cylindriques élémentaires qui constituent le solide, quoique cette température puisse varier d'une couche à une autre. Dans ces conditions il est clair que, à un instant quelconque, la température sera également uniforme dans chacune des couches. Nous désignerons par a le rayon du cylindre.

En supposant que V soit indépendant de z et de ψ, l'équation (11) du n° 6 devient

$$(1)\qquad \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

et l'on a, pour la condition relative à la surface,

$$(2)\qquad \frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a.$$

Posons

$$(3)\qquad V = Ue^{-mt},$$

U étant une fonction de r seulement, et m un nombre quelconque, essentiellement positif attendu que la température diminue quand le temps augmente. En substituant cette expression dans l'équation (1), on obtient, pour déterminer U, l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{4\theta U}{a^2} = 0,$$

en posant

$$\frac{m}{K^2} = \frac{4\theta}{a^2},$$

ce qui donne à la valeur (3) la forme

$$(3')\qquad V = Ue^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta t}.$$

L'équation (4) est satisfaite par la série [1]

$$(5)\qquad U = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right)^i.$$

---

[1] Posons, en effet, $r = \frac{za}{2\sqrt{\theta}}$, l'équation (4) devient

$$(a)\qquad \frac{d^2U}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dU}{dz} + U = 0.$$

Soit

$$U = \Sigma A_i z^i$$

La valeur (5), multipliée par une constante arbitraire, ne représente que l'une des deux intégrales particulières dont la somme doit donner la solution complète de l'équation (4). Mais la première de ces deux intégrales est la seule que nous avons à considérer dans la question que nous avons à résoudre, parce que la seconde, devenant infinie pour $r = 0$, est inadmissible [1].

15. Les valeurs que l'on doit attribuer à ζ ne sont pas arbitraires, car

---

une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z à partir de $j = 0$. En substituant cette série dans (a) et égalant à zéro le coefficient de z^{j-2}, on trouve

$$A_j = -\frac{A_{j-2}}{j^2}.$$

Il faut donc que la série commence par A_0, que les nombres j soient pairs.

Soient $j = 2i$. On a

$$A_{2i} = -\frac{A_{2i-2}}{2^2 i^2},$$

et de même

$$A_{2i-1} = -\frac{A_{2i-4}}{2^2 (i-1)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 = -\frac{A_0}{2^2},$$

d'où

$$A_{2i} = \frac{(-1)^i A_0}{1.2^2.3^3\ldots i^2}\,\frac{1}{2^{2i}},$$

et enfin

$$U = A_0\left[1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{1.2^2.3^3\ldots i^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2i}\right].$$

En prenant $A_0 = 1$, et remplaçant z par $2\frac{r}{a}\sqrt{\theta}$, on obtient la formule (5) du texte.

(1) Pour déterminer cette seconde intégrale, posons

$$(b) \qquad U = uU_1,$$

U_1 représentant la solution (5) et u une fonction de r.

En substituant l'expression (b) dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{2}{U_1}\frac{dU_1}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr} = 0,$$

elles doivent être choisies de manière que $Ue^{-\frac{4K^2\theta}{a^2}t}$, ou simplement U, satisfasse à la condition (2). En remplaçant, dans cette condition, V par l'expression (5), on trouve

$$(6)\qquad \frac{2\theta}{a}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i\, i\theta^{i-1}}{1.2^2\ldots i^2} + \frac{1}{u}\left[1 - \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2\ldots i^2}\theta^i\right] = 0.$$

Si nous posons

$$(7)\qquad 1 - \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i = f(\theta),$$

cette équation prend la forme suivante

$$(8)\qquad \frac{a}{2u}f(\theta) + \theta f'(\theta) = 0.$$

De l'équation (7), ou de

$$f(\theta) = 1 - \theta + \sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i,$$

d'où successivement, en désignant par B et A deux constantes arbitraires,

$$\frac{du}{dr} = \frac{B}{U_1^2 r},$$

$$u = A + B\int\frac{dr}{U_1^2 r},$$

d'où, pour l'intégrale générale de l'équation précitée,

$$U = AU_1 + BU_1\int\frac{dr}{U_1^2 r}.$$

Tous les éléments de l'intégrale du second membre de cette équation sont positifs, et comme le premier, correspondant à $r = 0$, est infini, il s'ensuit que cette intégrale elle-même est infinie, de sorte que, dans le problème que nous avons à résoudre, il faut supposer $B = 0$.

Comme nous le ferons voir en temps voulu.

on tire

$$f'(\theta) = -1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^{i-1},$$

$$f''(\theta) = \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i i(i-1)}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^{i-2}$$

et

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots(i-1)^2} \theta^{i-1},$$

ou, en remplaçant $i-1$ par i,

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^i,$$

et enfin

$$\theta \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} + f = 0. \tag{9}$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction f. On en déduit successivement

$$\theta \frac{d^3 f}{d\theta^3} + \frac{2 d^2 f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} = 0,$$

$$\theta \frac{d^4 f}{d\theta^4} + \frac{3 d^3 f}{d\theta^3} + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = 0,$$

. . . . . .

et, en général,

$$\theta \frac{d^{\nu+2} f}{d\theta^{\nu+2}} + (\nu+1) \frac{d^{\nu+1} f}{d\theta^{\nu+1}} + \frac{d^\nu f}{d\theta^\nu} = 0.$$

Il suit de là que, si une valeur de θ annule une dérivée quelconque de $f(\theta)$, les dérivées adjacentes prennent des signes contraires pour cette valeur, d'où résulte que les racines en nombre infini de l'équation

$$f(\theta) = 0$$

sont toutes réelles. Elles sont de plus positives, car, d'après la forme même de la fonction $f(\theta)$ définie par la formule (7), tous les termes qui

composent $f(-\theta)$ sont de même signe, et par conséquent cette dernière fonction ne peut pas s'annuler pour une valeur positive de θ [1].

On conclut de là que l'équation (8) a toutes ses racines réelles et positives.

Soient maintenant

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ les racines de l'équation (8) censées rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite;

U_ν, V_ν les valeurs de U, V correspondant à $\theta = \theta_\nu$, la première étant donnée par l'équation (6');

A_ν une constante arbitraire.

---

[1] On fait ici l'application d'un théorème que Fourier considère comme ayant été démontré depuis longtemps, mais il ne l'a pas mentionné dans son *Analyse des équations algébriques*, publiée après sa mort, en 1830, par les soins de Navier, et je n'en ai trouvé de trace nulle part. Il est facile, d'ailleurs, de combler cette lacune ainsi qu'il suit.

Soient X une fonction entière du degré m, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ses dérivées successives. Supposons que la fonction X jouisse de cette propriété que si une valeur réelle de x annule l'une quelconque X_i de ses dérivées, cette valeur rende X_{i-1} et X_{i+1} de signes contraires; l'équation $X = 0$ a toutes ses racines réelles.

La méthode adoptée par Sturm dans la démonstration de son théorème s'applique évidemment ici, en substituant, à la suite de ses fonctions, la suivante

$$X, X_1, X_i, \ldots, X_m.$$

Or, la suite des premiers termes de ces dernières fonctions ne présentant que des permanences, il s'ensuit que toutes les racines de $X = 0$ sont réelles. Le théorème a lieu quel que soit m, et par conséquent quand m est infini.

Il est évident, d'après ce qui précède, que $X_i = 0$ a toutes ses racines réelles.

On sait que, entre deux racines réelles consécutives de $X = 0$, il y en a au moins une de $X_1 = 0$, et il est évident que dans le cas considéré il ne peut y en avoir qu'une seule. Si donc toutes les racines de $X = 0$ sont de même signe, celles de $X_1 = 0$ porteront ce signe.

En désignant par λ une constante, considérons l'équation

$$(a) \qquad \lambda X + x X_1 = 0.$$

Soient x', x'' deux racines consécutives de $X_1 = 0$. Pour $x = x'$ et $x = x''$, X changera de signe, et il en sera par suite de même du premier membre de l'équation (a). D'où il suit que cette équation aura une racine, mais unique, comprise entre x' et x'', et que, par suite, toutes ses racines sont réelles. On voit aussi que si les racines de $X = 0$ sont toutes positives ou négatives, il en sera de même de celles de l'équation (a).

Nous avons, comme solution particulière du problème au point où il est arrivé,

$$V_\nu = A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t}, \tag{10}$$

et, comme solution plus générale,

$$V = \sum_1^\infty A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t}. \tag{11}$$

16. Si $F(r)$ représente la température initiale de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t = 0$, on aura, pour déterminer les A_ν, l'équation

$$F(r) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu U_\nu. \tag{12}$$

En désignant par σ une fonction de r, on déduit de là

$$\int_0^a F(r)\sigma\, dr = \sum_1^\infty A_\nu \int_0^a U_\nu \sigma\, dr. \tag{13}$$

Supposons que la fonction σ soit choisie de telle manière que toutes les intégrales du second membre de l'équation (13) soient nulles, à l'exception de celle qui se rapporte à U_ν, il nous restera une égalité qui nous permettra de déterminer A_ν. Le tout se réduit donc à trouver la forme de la fonction σ.

De l'équation (4), mise sous la forme

$$-\frac{4\theta_\nu}{a^2} U_\nu = \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\nu}{dr}, \tag{4'}$$

on déduit

$$-\frac{4\theta_\nu}{a^2}\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \int_0^a \sigma \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \int_0^a \frac{\sigma}{r}\frac{dU_\nu}{dr}\, dr.$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int \sigma \frac{d^2 U}{dr^2}\, dr = \sigma \frac{dU}{dr} - \int \frac{d\sigma}{dr} dU = \sigma \frac{dU}{dr} - U\frac{d\sigma}{dr} + \int U \frac{d^2\sigma}{dr^2}\, dr,$$

$$\int \frac{\sigma}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{\sigma}{r} U - \int U \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) dr:$$

l'équation précédente devient ainsi

$$-4\frac{\theta_\nu}{a^2}\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]dr + \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a,$$

d'où

$$-\int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{r^2 d} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{4\theta_\nu\sigma}{a^2}\right]dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a.$$

Si σ satisfait à l'équation

$$(14)\qquad \frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{4\theta_\mu\sigma}{a^2} = 0,$$

la précédente se réduit à

$$(15)\qquad \frac{4}{a^2}(\theta_\mu - \theta_\nu)\int_0^a U_\nu\sigma\, dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a.$$

Or, en posant

$$\sigma = sr,$$

l'équation (14) se réduit à la suivante

$$\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds}{dr} + \frac{4\theta_\mu s}{a^2} = 0.$$

On voit donc, en se reportant à l'équation (4), que l'on peut prendre

$$s = U_\mu$$

et, par suite,

$$(16)\qquad \sigma = rU_\mu.$$

Si l'on remarque, d'après la valeur (5), que $\frac{dU}{dr}$ est nul avec r, l'équation (15) se réduit à la suivante

$$(17)\qquad \int_0^a U_\nu\sigma\, dr = \frac{a^2}{4}\frac{1}{\theta_\mu - \theta_\nu}\left(U_\mu\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{dU_\mu}{dr}\right)^a.$$

Mais, d'après l'équation (2), on a, pour $r = a$,

$$\frac{1}{U_\nu}\frac{dU_\nu}{dr} = \frac{1}{U_\mu}\frac{dU_\mu}{dr},$$

d'où il suit que cette intégrale est nulle lorsque μ est différent de ν; mais, lorsqu'il y a égalité, la valeur de l'intégrale est celle de la dérivée du second membre de l'équation (17) par rapport à θ_μ, dans laquelle on a fait ensuite $r = a$, $\theta_\mu = \theta_\nu$. Si l'on remarque, d'après l'équation (5), que U est de la forme

$$U = \varphi\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right), \tag{18}$$

on reconnaît sans peine que la valeur cherchée est

$$\int_0^a U_\nu \sigma\, dr - \frac{a^2}{2}(\varphi'^2\theta - \varphi\varphi' - \varphi\varphi''\theta_\nu), \tag{19}$$

en représentant $\varphi(\theta_\nu)$ simplement par φ; mais les équations (2) et (4) donnent, en remplaçant U par l'expression (18),

$$\varphi' = -\frac{a}{2n\theta_\nu}\varphi,$$

$$\theta_\nu\varphi'' + \varphi' + \varphi = 0.$$

En éliminant dans la formule (19) φ' et φ'' au moyen de ces équations, on trouve

$$\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4n^2\theta_\nu} + 1\right)\varphi^2. \tag{20}$$

En nous reportant à l'équation (14), on voit que l'on a

$$A_\nu = \frac{2}{a}\frac{\int_0^a F(r)\, r U_\nu\, dr}{\left(1 + \frac{a^2}{4n^2\theta_\nu}\right) U_{\nu a}^2},$$

en représentant par $U_{\nu a}$ la valeur de U_ν pour $x = a$, c'est-à-dire $\varphi(\theta_\nu)$. Le problème se trouve ainsi résolu.

Si le temps écoulé est suffisamment grand, la série (11) se réduira très sensiblement à son premier terme, qui correspond à la plus petite valeur δ_1 des δ_ν.

§ V. — *Mouvement uniforme de la chaleur dans un prisme carré indéfini dans un sens.*

17. Soient

O le centre de la base du prisme;
Oz l'axe de figure;
Ox, Oy les parallèles en O aux côtés de la base;
$2a$ la longueur de ces côtés.

Nous supposerons que la base du prisme est maintenue à une température constante que, pour plus de simplicité, nous prendrons égale à l'unité, et que la température intérieure est devenue stationnaire.

Nous avons à considérer l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0, \tag{1}$$

avec les conditions

$$\pm \frac{dV}{dx} + \frac{V}{h} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a, \tag{2}$$

$$\pm \frac{dV}{dy} + \frac{V}{h} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm a. \tag{2}$$

En raison de la symétrie, la fonction V doit conserver la même valeur quand on change les signes de x et y, et, de plus, elle doit devenir nulle pour $z = \infty$.

En designant par p, q, r des nombres positifs quelconques, et par A une constante arbitraire, on satisfera à ces conditions en posant

$$V = Ae^{-rz} \cos px \cos qy.$$

En substituant cette expression dans l'équation (1), on trouve

qu'elle la vérifie, à la condition que

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Nous avons ainsi jusqu'à présent

$$(3) \qquad V = A e^{-z\sqrt{p^2+q^2}} \cos px \cos qy.$$

Si l'on exprime que cette fonction satisfait aux conditions (2) et (2'), on trouve pour résultats

$$(4) \qquad \begin{cases} pa \operatorname{tang} pa = \dfrac{a}{n}, \\ qa \operatorname{tang} qa = \dfrac{a}{n}. \end{cases}$$

Ces deux équations, en pa et qa, rentrent l'une dans l'autre et ont une infinité de racines positives.

Supposons que ces racines soient rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus petite; soient $m_1, m_2, \ldots$ les quotients de ces racines par a, ou les valeurs qu'il convient d'attribuer à p et à q; A_i, A_j deux constantes arbitraires caractérisées par leurs indices.

L'expression

$$V = A_i A_j e^{-z\sqrt{m_i^2+m_j^2}} \cos m_i x \cos m_j y$$

satisfera à l'équation (1) et aux conditions (2); mais on aura une solution plus générale en faisant la somme des expressions semblables obtenues en donnant à i et j toutes les valeurs entières possibles depuis l'unité jusqu'à l'infini.

Nous prendons donc

$$(5) \qquad \begin{cases} V = \{ A_1 e^{-z\sqrt{m_1^2+m_2^2}} \cos m_1 x + A_2 e^{-z\sqrt{m_2^2+m_1^2}} \cos m_2 x \ldots \} A_1 \cos m_1 y, \\ \quad + \{ A_2 e^{-z\sqrt{m_1^2+m_2^2}} \cos m_1 x + A_2 e^{-z\sqrt{m_2^2+m_1^2}} \cos m_2 x \ldots \} A_2 \cos m_2 y, \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mais on doit avoir $V = 1$ pour $z = 0$, quelles que soient les valeurs

de x et y entre $-a$ et a, ou

$$1 = (A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + A_3 \cos m_3 x + \ldots)$$
$$\times (A_1 \cos m_1 y + A_2 \cos m_2 y + \ldots).$$

Il est évident que cette condition sera satisfaite si l'on détermine les coefficients A_i de manière que l'on ait, quel que soit x entre 0 et a,

$$(6) \qquad A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1.$$

Multiplions cette équation par $\cos m_j x\, dx$, et intégrons entre les limites 0 et a. Le coefficient de A_i, ou

$$\int_0^a \cos m_i x \cos m_j x\, dx = \frac{m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a}{m_i^2 - m_j^2},$$

sera nul si j est différent de i; c'est ce qui résulte de l'une ou l'autre des équations (4) qui donnent

$$m_i \operatorname{tang} m_i a = m_j \operatorname{tang} m_j a,$$

d'où

$$m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a = 0.$$

Si nous supposons $j = i$, il ne restera dans l'équation (6), multipliée par $\cos m_2 x$ et intégrée entre $x = 0$ et $x = a$, que le terme en A_i, dont le coefficient sera

$$\int_0^a \cos^2 m_i x\, dx = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\sin 2 m_i a}{2 m_i}\right),$$

et l'on obtiendra de cette manière

$$(7) \qquad A_i = \frac{4 \sin m_i a}{2 a m_i + \sin 2 m_i a}.$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que la formule (6)

conduit, d'après notre analyse, à la relation suivante

$$\frac{1}{4} = \Sigma \frac{\sin m_i a \cos m_i x}{2 a m_i a + \sin 2 m_i a} = 0,$$

qui a lieu pour toutes valeurs de x comprises entre o et a, et par suite entre o et $-a$.

18. Nous allons maintenant étudier deux cas particuliers.

1° *L'épaisseur du prisme est très petite.* — En posant $u = pa$ ou qa, les équations (4) se réduisent à la suivante

$$u \operatorname{tang} u = \frac{a}{n}. \tag{8}$$

Si la fraction $\frac{a}{n}$ est très petite, cette équation aura une racine u_1 également très petite, dont la valeur approximative est

$$u_1 = \sqrt{\frac{a}{n}}.$$

Les autres racines s'obtiendront par approximation en supposant $a = 0$ dans l'équation (8), et seront

$$u_2 = \pi, \quad u_3 = 2\pi, \quad u_4 = 3\pi, \quad \ldots,$$

de sorte que nous aurons

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{an}}, \quad m_2 = \frac{\pi}{a}, \quad m_3 = \frac{2\pi}{a}, \quad m_4 = \frac{3\pi}{a}, \quad \ldots.$$

Il résulte de là que m_1 est beaucoup plus grand que m_2, m_3, ..., de sorte que l'on peut se borner à considérer le premier terme de la série (6), c'est-à-dire celui qui dépend de $e^{-z\sqrt{2m_1^2}}$.

Son coefficient

$$A_1 = \frac{4 \sin u_1}{2 u_1 + \sin 2 u_1},$$

en raison de la petitesse de u_1, est sensiblement égal à l'unité, de sorte que l'on a sensiblement

$$V = e^{-z\sqrt{\frac{2}{an}}} \cos\sqrt{\frac{a}{n}}\, x \cos\sqrt{\frac{a}{n}}\, y.$$

2° *L'épaisseur du prisme est très grande.* — Si le rapport $\frac{a}{n}$ est très grand, l'équation (8) donne, à très peu près,

$$u_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad u_3 = \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

d'où

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a}, \quad \cdots.$$

La valeur de V, qui résulte de ces données, offre trop peu d'intérêt pour que nous croyions devoir l'écrire.

§ VI. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cube.*

19. Considérons un cube dont la température intérieure est uniforme et que l'on introduit ensuite dans un milieu dont la température est zéro. Proposons-nous de déterminer la loi de la décroissance de la température aux différents points du solide en fonction du temps écoulé.

Soient

$2a$ le côté du cube;

O son centre;

Ox, Oy, Oz les parallèles menées par ce point aux trois couples d'arêtes du cube.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que la température initiale est égale à l'unité.

La loi cherchée se déduira de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

en y joignant les conditions

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \pm \dfrac{dV}{dx} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{pour} & x = \pm a, \\ \pm \dfrac{dV}{dy} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{»} & y = \pm a, \\ \pm \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{»} & z = \pm a. \end{array} \right.$$

D'après le raisonnement fait au commencement du paragraphe précédent et d'autres considérations développées auparavant, nous sommes conduit à supposer qu'une solution particulière de la question est de la forme

$$V = Ae^{-lt}\cos px\cos qy\cos rz,$$

l, p, q, r désignant des nombres, et A une constante arbitraire. Cette valeur satisfait à l'équation (1), à la condition que l'on ait

$$l = K^2(p^2 + q^2 + r^2),$$

et alors elle devient

$$(3)\qquad V = Ae^{-K^2(p^2+q^2+r^2)t}\cos px\cos qy\cos rz.$$

Les conditions (2) se réduisent aux équations suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} pa\,\mathrm{tang}\,pa = \dfrac{a}{n}, \\ qa\,\mathrm{tang}\,qa = \dfrac{a}{n}, \\ ra\,\mathrm{tang}\,ra = \dfrac{a}{n}, \end{cases}$$

qui se ramènent à la suivante :

$$(5)\qquad u\,\mathrm{tang}\,u = \frac{a}{n},$$

en désignant par u l'un quelconque des produits pa, qa et ra.

Cette équation, à laquelle nous sommes déjà arrivé au paragraphe précédent, admet une infinité de racines positives que nous supposerons rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite; soient m_1, m_2, m_3 les quotients des racines par a; A_i, A_j, A_k trois constantes arbitraires. Dans l'état actuel de la question, nous aurons pour solution particulière

$$\begin{aligned} U &= A_iA_jA_ke^{-K^2(m_i^2+m_j^2+m_k^2)t}\cos m_ix\cos m_jy\cos m_kz \\ &= A_ie^{-K^2m_i^2t}\cos m_ix\,.\,A_je^{-K^2m_j^2t}\cos m_jy\,.\,A_ke^{-K^2m_k^2t}\cos m_kz. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons une solution plus générale en faisant la somme des expressions semblables pour toutes les valeurs entières et positives de i, j, k, et nous obtiendrons ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V = &[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 x + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 x + \ldots],\\ &+[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 y + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 y + \ldots],\\ &+[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 z + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 z + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Mais pour $t = 0$ on doit avoir $V = 1$, quels que soient x, y, z entre les limites $-a$ et a. On satisfera à cette condition si, quel que soit x entre $-a$ et a, ou simplement 0 et a, on a

$$A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1,$$

ce qui, d'après le paragraphe précédent, conduit à prendre

$$(7)\qquad A_i = \frac{4\sin m_i a}{2am_i + \sin 2m_i a};$$

l'équation (6) donnera, par suite, la solution complète du problème.

20. D'après cette équation, on voit que V est le produit de trois fonctions semblables qui ne dépendent respectivement que de x, y, z et du temps. Il est d'ailleurs facile de vérifier qu'un pareil produit peut satisfaire à l'équation (1).

Soient, en effet, X, Y, Z trois fonctions de t, mais qui ne renferment respectivement que x, y, z, et posons

$$V = XYZ.$$

En portant cette expression dans l'équation (1), on trouve la suivante :

$$YZ\frac{dX}{dt} + ZX\frac{dY}{dt} + XY\frac{dZ}{dt} = K^2\left(YZ\frac{d^2X}{dx^2} + ZX\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right),$$

qui sera vérifiée en posant

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dX}{dt},\quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dY}{dt},\quad \frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dZ}{dt}.$$

On satisfera aux conditions relatives à la surface en posant

$$\pm \frac{dX}{dx} + \frac{X}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a,$$

$$\pm \frac{dY}{dy} + \frac{Y}{n} = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm a,$$

$$\pm \frac{dZ}{dz} + \frac{Z}{n} = 0 \quad \text{»} \quad z = \pm a,$$

et il est facile de reconnaître, en se reportant au n° 2, que l'on retombe sur la solution (6).

21. Si le temps écoulé est devenu suffisamment grand, V se réduira sensiblement à son premier terme correspondant à $i = j = k = 1$, et l'on aura par suite

$$(7) \qquad V = \frac{4^3 \sin^3 m_1 a}{(2am_1 + \sin 2m_1 a)^3} \cos m_1 x \cos m_1 y \cos m_1 z\, e^{-3k \cdot m_1^2 t}.$$

22. La température moyenne, au bout du temps t, a pour expression

$$\frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} V\, dx\, dy\, dz$$
$$= \frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} X dx \int_{-a}^{a} Y dy \int_{-a}^{a} Z dz = \frac{1}{2^3 a^3} \left(\int_{-a}^{a} X dx \right)^3,$$

expression qu'il est facile de calculer et dont il nous paraît inutile de donner la valeur.

23. Lorsque a est très petit, la plus petite racine de l'équation (5) est à très peu près égale à $\sqrt{\frac{a}{n}}$, et l'on a

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{na}}.$$

L'expression (7) devient, eu égard à la petite valeur de $m_1 a$,

$$V = e^{-\frac{3k^2}{an} t} \cos \frac{x}{\sqrt{na}} \cos \frac{y}{\sqrt{na}} \cos \frac{z}{\sqrt{na}}.$$

Au centre d'une face on a

$$V = e^{-\frac{3k^2}{an}t} \cos\sqrt{3}\,\frac{a}{n} = e^{-\frac{3k^2}{an}t}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{n}\right),$$

et, en se reportant à la formule (13) du n° **15**, on reconnaît que cette température est la même que la surface de la sphère inscrite.

24. Si les dimensions du cube sont très grandes, on aura, à très peu près,

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a},$$

et il sera facile de former l'expression de V.

§ VII. — *Mouvement varié de la chaleur dans un solide indéfini dans tous les sens.*

25. Nous n'avons ici qu'à déterminer la forme de l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{k^2}\frac{dV}{dt},$$

qui satisfait à la condition

$$V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

$F(x, y, z)$ étant une fonction donnée qui représente la température au point (x, y, z).

Soient α, β, γ trois constantes arbitraires. Nous avons vu (n° **10**) que l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{k^2}\frac{dV}{dx}$$

est satisfaite par

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}},$$

et (n° 20) que l'équation (1) est satisfaite par le produit de trois fonctions semblables respectivement en x, y, z. Nous aurons donc la solution particulière

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(y-\beta)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(z-\gamma)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}}.$$

Si f désigne une fonction arbitraire, nous obtiendrons une autre solution particulière en multipliant cette expression par $f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$, et enfin une solution plus générale en intégrant, par rapport à α, β, γ, entre les limites $-\infty$ et ∞. On trouve ainsi

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma\, f(\alpha, \beta, \gamma)\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}{4K^2 t}}.$$

En posant

$$\frac{\alpha - x}{2K\sqrt{t}} = u, \quad \frac{\beta - y}{2K\sqrt{t}} = v, \quad \frac{\gamma - z}{2K\sqrt{t}} = w,$$

u, v, w étant des variables que l'on substitue respectivement à α, β, γ, il vient

$$(3) \quad V = 8K^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-u^2 - v^2 - w^2} f(x + 2uK\sqrt{t}, y + 2vK\sqrt{t}, z + 2wK\sqrt{t}),$$

et nous devons avoir

$$F(x, y, z) = 8K^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-u^2 - v^2 - w^2} f(x, y, z),$$

ou

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 8K^3 f(x, y, z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= 8K^3 \pi^{\frac{3}{2}} f(x, y, z). \end{aligned}$$

En portant la valeur de la fonction f déduite de cette équation dans la formule (3), on obtient, pour la solution du problème,

$$(4)\quad V = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - 2u\mathrm{K}\sqrt{t}, y + 2v\mathrm{K}\sqrt{t}, z + 2w\mathrm{K}\sqrt{t})\, e^{-u^2 - v^2 + w^2}\, du\, dv\, dw.$$

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(TROISIÈME NOTE);

PAR M. É. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(SUITE.)

Résumé de la méthode d'intégration. — Pour résumer ce que nous avons dit de l'intégration des équations différentielles qui ne contiennent qu'une variable indépendante x, nous rappellerons qu'en désignant par y la fonction inconnue, nous avons représenté l'équation différentielle proposée par

$$(a) \qquad \varphi(y) = 0;$$

de plus, F étant une fonction explicite de y, nous avons trouvé pour l'expression de cette fonction

$$\begin{aligned} F(y) = F(w) &- \frac{\varphi(w)}{d\varphi(w)} dF(w) \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{d\varphi(w)\, d^2F(w) - d^2\varphi(w)\, dF(w)}{(d\varphi(w)^3)} - \ldots, \end{aligned}$$

ou, en introduisant les dérivées par rapport à x pour l'exécution des calculs,

$$(b) \left\{ \begin{aligned} F(y) = F(w) &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} \left(\frac{dF(w)}{dx}\right) \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \ldots \end{aligned} \right.$$

$\left(\frac{d\varphi(\omega)}{dx}\right)$ désigne spécialement la dérivée par rapport à x de la fonction $\varphi(\omega)$ considérée seulement comme fonction de ω.

L'intégration de l'équation proposée est donnée au moyen d'une fonction ω complètement arbitraire en principe; mais dans les applications, pour que le développement soit convergent, il faut que cette fonction ω soit aussi rapprochée que possible de la fonction inconnue y. S'il existe plusieurs solutions, l'expression précédente les donnera en général, pourvu que la fonction ω soit convenablement choisie. Or, on pourra toujours déterminer cette fonction, ou valeur fondamentale, ϖ, en réduisant l'équation proposée à une équation linéaire à coefficients constants toujours intégrable par les moyens ordinaires; à cet effet, on remplacera, dans les coefficients, les quantités variables par des valeurs moyennes se rapportant aux limites entre lesquelles on doit prendre les quantités x, et par suite y; l'équation ainsi formée, appelée *équation réduite*, conduit ordinairement, par sa valeur fondamentale ϖ, à l'intégrale générale de l'équation proposée, parce que l'on introduit de cette façon autant de constantes arbitraires que l'intégration complète en comporte. Quant aux intégrales singulières, elles sont déterminées par un choix convenable de l'équation réduite.

Si le développement obtenu pour y, ou Fy, n'est pas assez convergent, on aura recours à des moyens auxiliaires donnant une convergence plus rapide :

1° On peut transformer le développement (*b*) au moyen des formules (10) et (11) de la *génération neutre*. Cette opération consiste, ainsi que nous l'avons dit, à remplacer le développement par une fraction continue équivalente, suivant le procédé indiqué par Wronski, et à en calculer les réduites successives. Cette fraction continue donnant toujours lieu à un développement convergent, les réduites, ou *progrès* successifs de la génération neutre, formeront une suite d'expressions approchant de plus en plus de la fonction cherchée. Il est facile de reconnaître, par cette transformation, que l'indétermination qui se présente, lorsque les coefficients de l'équation proposée sont des fonctions de y seulement, peut toujours être levée.

2° On peut appliquer la méthode d'exhaustion; on obtient ainsi une valeur plus approchée que celle que l'on obtiendrait directement, en

faisant varier convenablement la quantité auxiliaire ω qui sert à former l'équation transformée et d'où l'on tire l'équation réduite.

3° En introduisant une fonction arbitraire dans l'équation réduite, on peut obtenir une valeur fondamentale w, assez rapprochée de l'inconnue y pour que le développement soit plus convergent que sans cette fonction arbitraire. Pour faciliter les calculs, il y a avantage à employer la fonction se^{rx}, où s et r sont des constantes, parce que la solution de l'équation réduite conserve la même forme que si la fonction arbitraire n'existait pas.

4° Enfin, on peut encore remplacer les valeurs moyennes par d'autres valeurs moyennes calculées au moyen des premières, et arriver ainsi, de proche en proche, à des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

En opérant par les moyens que nous venons d'énumérer, on parviendra généralement à obtenir telles valeurs que l'on voudra de la fonction inconnue, et un usage régulier des quantités arbitraires w, ω, se^{rx} permettra, dans bien des cas, d'arriver rapidement au résultat cherché; mais la détermination la plus convenable de ces quantités arbitraires demande une certaine habileté, un certain *art* : c'est pour cette raison que Wronski donne le nom de *technie* à l'ensemble des méthodes du genre de celles que nous exposons.

Nous allons montrer par quelques exemples numériques comment les calculs doivent être conduits ; ces exemples achèveront de faire comprendre ce que nous avons dit.

Quatrième exemple. Calculs numériques. — Reprenons l'équation que nous avons traitée dans le deuxième exemple, en adoptant pour les coefficients les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0, \qquad p = q = 0{,}0015,$$
$$b = 40, \qquad m = 0,$$
$$c = 10, \qquad n = 0{,}6.$$

La première équation (7) du deuxième exemple devient

$$(c) \qquad \frac{dy}{dx} + p(nx + y - b + c) = 0,$$

et son equation réduite (t) est

$$(d) \qquad \frac{dw}{dx} + cpw = 0,$$

d'où la valeur fondamentale

$$(d') \qquad w = be^{-cpx};$$

par suite, l'inconnue donnée par l expression précédente ou par celle du deuxième exemple (o) se trouve être, en faisant usage de la notation des dérivées,

$$(e) \qquad y = w + \frac{nx - w - b}{n} w' + \frac{1}{2}\left(\frac{nx + w - b}{n}\right)^2 \left(w'' - 2\frac{w'^2}{w}\right).$$

Calculons la valeur de l'inconnue pour la valeur $x = 5$, on a

$$(f) \qquad w = 37,1097, \quad w' = -0,55664, \quad w'' = 0,00602;$$

cette dernière valeur est donnée par l'équation (c) différentiée, savoir

$$w'' = -p[(nx + 2w - b + c)w' + nw];$$

puis la valeur de l'inconnue est

$$(e') \qquad y = 37,1096 - 0,1016 - 0,0002 = 37,0079.$$

1° Le développement est ici assez convergent, aussi le calcul au moyen de la formule (π) de la génération neutre ne donne-t-il pas plus d'approximation. On a, en effet,

$$(g) \qquad y = w - \frac{nx + w - b}{w'n + \frac{1}{2}\left(w'' - 2\frac{w'^2}{w}\right)(nx + w - b)} w'^2,$$

ce qui donne, pour $x = 5$,

$$(g)' \qquad y = 37,1097 - 0,1018 = 37,0078.$$

On peut vérifier ici que, pour $n = 0$, l'expression (e) est essentiellement divergente, puisque les termes deviennent infinis, tandis que, pour la même valeur de n, la seconde expression est parfaitement déterminée.

2° Pour appliquer la méthode d'exhaustion, on doit partir des valeurs fondamentales données par l'équation réduite; mais si l'on veut calculer la dérivée seconde et les dérivées supérieures autrement que par cette équation réduite, il faut les tirer de l'équation transformée

$$(h) \qquad y' + cp\left(\frac{nx - y - b + c}{c}\right)^{\omega} y = 0,$$

d'où

$$y'' + cp\left[\left(\frac{nx - y - b + c}{c}\right)^{\omega} y' + \omega\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega - 1}\left(\frac{n + y'}{c}\right) y\right],$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées. Ce moyen, plus compliqué, quoique plus exact, est inutile, parce que les valeurs de ces dérivées sont rectifiées par la suite du calcul; ici d'ailleurs, à cause de la convergence de l'expression (c), les valeurs de ces dérivées, calculées d'une manière ou d'une autre, différeraient assez peu; nous adopterons donc les valeurs déjà trouvées (f).

Maintenant nous avons pour une valeur quelconque w_q correspondant à ω_q,

$$(i) \quad \begin{cases} w_q = w_{q-1} \\ \qquad + \dfrac{w'_{q-1}(nx + w_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + w_{q-1} - b + c)w_{q-1}}{\omega_q pn w_{q-1}} w_{q-1} + \ldots \\ w'_q = w'_{q-1} \\ \qquad + \dfrac{w'_{q-1}(nx + w_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + w_{q-1} - b + c)w_{q-1}}{\omega_q pn w_{p-1}} w'_{q-1} + \ldots \end{cases}$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées.

Pour $q = 1$, ces expressions se simplifient, elles deviennent

$$(i') \quad \begin{cases} w_1 = w - c^{\omega_1}(nx + w - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + w - b + c)\dfrac{w'}{\omega_1 n} + \ldots, \\ w'_1 = w' - c^{\omega_1}(nx + w - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + w - b + c)\dfrac{w'}{\omega_1 n} + \ldots, \end{cases}$$

et ainsi de suite. Pour $\omega_q = 1$, on a

$$\alpha_q = y.$$

En appliquant ces formules, nous obtenons pour :

I. $\omega_1 = \frac{1}{3}$.

$$j \quad \begin{cases} \alpha_1 = 37,10972 - 0,10214 = 37,00758, \\ \alpha'_1 = -0,55664 + 0,00110 = -0,55554, \end{cases}$$

et nous conserverons pour α''_1 la valeur précédente de α''.

II. $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

$$j' \quad \begin{cases} \alpha_2 = 37,00758 + 0,00004 = 37,00762, \\ \alpha'_2 = -0,55554 - 0,0000005 = -0,55554. \end{cases}$$

On voit, pour cette seconde valeur de ω, que la correction ne porte pas sur la première dérivée.

III. $\omega_3 = 1$.

$$j'' \quad y = 37,00762 + 0,00011 = 37,00773.$$

Nous trouvons ainsi, pour l'inconnue, à peu près le résultat précédent, bien que nous n'ayons pris que deux termes du développement.

3° Pour exécuter le calcul avec la fonction arbitraire se^{rx}, nous avons l'équation transformée

$$k \quad y'' + cp\left(\frac{nx - y - b - c}{c}\right)y' + s(1 - \omega)e^{rx} = 0.$$

En faisant $\omega = 0$, l'intégration donne

$$k' \quad \begin{cases} \alpha = \left(b + \frac{s}{r + cp}\right)e^{-cpx} - \frac{s}{r + cp}e^{rx}, \\ \alpha' = -cp\left(b + \frac{s}{r - cp}\right)e^{-cpx} - \frac{sr}{r - cp}e^{rx}, \end{cases}$$

et, si l'on représente par u le second terme de l'expression de w, il vient

$$(l)\quad \begin{cases} y = w + \dfrac{p(nx + w - b)w - (r + cp)u}{pnw}\, w' \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p(nx + w - b)w - (r + cp)u}{pnw}\right]^2 \left(w'' - 2\dfrac{w'^2}{w}\right). \end{cases}$$

Pour appliquer cette formule avec deux termes seulement, nous ferons

$$(m)\qquad s = 1, \quad r = -20,$$

et nous prendrons $r + cp = -20$, au lieu de $19,985$; à cause de la très faible valeur de e^{rx}, les termes qui contiennent u en facteur sont nuls très sensiblement. Nous avons donc

$$w = \left(40 - \frac{1}{20}\right) e^{-0,015x};$$

pour $x = 5$, il vient

$$w = 37,0633,$$
$$w' = -0,55595;$$

par suite, l'expression précédente donne, avec deux termes,

$$(l')\qquad y = 37,0633 - 0,05865 = 37,0047.$$

Ce calcul suffit pour montrer comment on doit faire usage d'une fonction arbitraire pour abréger les calculs; l'emploi de cette fonction suppose que l'on ait une idée de l'approximation donnée par la valeur fondamentale, approximation que l'on peut évaluer par un ou deux rapides tâtonnements.

4° Enfin on peut effectuer les calculs au moyen d'un changement de constantes arbitraires. Calculons d'abord la valeur de y pour $x = 2,5$; la formule (c), telle que nous l'avons déjà employée, donne avec deux termes

$$w = 38,5276,$$
$$w' = -0,57791.$$

d'où

$$(n) \qquad y = 38,5276 - 0,02658 = 38,50118.$$

Avec cette valeur, déterminons la nouvelle équation réduite; les valeurs moyennes sont maintenant

$$(p) \qquad \alpha = 2,5, \quad \beta = 38,50118;$$

nous les prendrons pour nouvelles valeurs initiales, et l'équation réduite devient

$$w' + p(n\alpha + \beta - b + c)w = 0,$$

ou

$$(q) \qquad w' + 0,015002 . w = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$w = \text{const}. e^{-0,015002.x}.$$

La constante est déterminée par la condition

$$\beta = \text{const}. e^{-0,015002.\alpha},$$

d'où

$$\text{const.} = 39,9727.$$

Maintenant, pour $x = 5$, on a

$$w = 39,9727 . e^{-0,015002.5} = 37,0840,$$
$$w' = -0,015002 . 37,0840 = -0,55633,$$

et la formule (e) donne, avec deux termes,

$$(r) \qquad y = 37,0840 - 0,0778 = 37,0062.$$

Tels sont les divers moyens dont on peut faire usage, ensemble ou séparément, pour faciliter l'application de la méthode secondaire. En général, il conviendra de ne pas les employer indifféremment, parce

que l'on ne rencontrera pas toujours une convergence aussi rapide que dans l'exemple précédent; le choix de ces moyens sera facile à déterminer : en tous cas, par le changement des constantes arbitraires, on parviendra toujours à obtenir des valeurs de l'inconnue aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

Rappelons encore que la méthode présente pourra se trouver en défaut dans certains cas, ainsi que Wronski l'a fait voir par un exemple; on devra recourir à une autre méthode. Néanmoins, celle-ci pourra rendre de grands services et être presque toujours utilisée.

Nous venons de traiter l'exemple précédent au moyen d'une équation réduite linéaire à coefficients constants; l'intégrale trouvée est ainsi l'intégrale générale, puisqu'elle comporte une constante arbitraire. Mais, dans le second exemple, nous avons indiqué plusieurs manières de former l'équation réduite; il est donc permis de supposer que les résultats que l'on obtiendrait avec ces différentes équations ne seront pas identiques; voyons ce qu'il en est. Pour cela, reprenons l'équation proposée et examinons le caractère qu'elle présente.

L'équation (*c*)

$$y' + (pnx - b + c)y + py^2 = 0,$$

intégrée par les moyens ordinaires, donne

$$(s) \qquad y = b\,\frac{e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + (pb - c)x}}{1 + bp\int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + (pb - c)x}\,dx}.$$

Cette intégration s'obtient en posant, *a priori*,

$$y = \frac{u}{v},$$

u et v étant deux fonctions auxiliaires qui, déterminées d'après l'équation proposée, donnent la solution précédente, ainsi que la solution $y = 0$. De même, si l'on avait l'équation

$$(t) \qquad y' - P'y + py^2 = 0,$$

P' et p étant deux fonctions quelconques de x, on trouverait pour équation primitive

$$(u) \qquad y \int p e^{P} dx - e^{P} = 0.$$

Ce résultat est identique au précédent en faisant

$$(v) \qquad P' = -(p(nx - b + c)).$$

L'intégrale (s) contient une constante arbitraire, la quantité b qui se trouve en dehors des exposants. Cette relation semble ainsi donner l'intégrale générale ; cependant la constante ne peut être éliminée entre l'équation (s) et la même différentiée, ou entre (u) et celle-ci

$$(u') \qquad y' \int p e^{P} dx + y p e^{P} - P' e^{P} = 0.$$

sans que l'exponentielle disparaisse également; cette exponentielle a donc le caractère d'une fonction singulière : par suite, l'intégrale trouvée (s) ou (u) n'est qu'une intégrale singulière. Ce fait est vérifié par les valeurs de l'inconnue calculées au moyen des formules de Wronski et au moyen de l'expression (s), valeurs qui diffèrent completement. Il en résulte que les formules de Wronski contenant une constante arbitraire donnent l'intégrale générale, tandis que l'expression (s) ne donne qu'une intégrale singulière de l'équation différentielle proposée.

Les intégrales singulières exigent que le problème que l'on traite présente par lui-même des conditions telles que les relations qui ont lieu entre l'équation primitive et ses dérivées, d'après l'équation proposée, puissent se traduire par l'élimination de fonctions singulières: autrement, sans cette condition préalable, les relations entre l'équation primitive et ses dérivées ne peuvent être exprimées que par suite de l'élimination de constantes, ce qui peut toujours avoir lieu. D'une autre manière, nous disons qu'il faut distinguer les conditions relatives au problème dont on s'occupe des conditions algorithmiques relatives à l'équation différentielle du problème. Ces deux espèces de conditions sont indépendantes en elles-mêmes; mais, quand on attache à l'équation différentielle le sens que lui donne le problème que l'on traite, les

conditions devant concorder, il en résulte certaines solutions, tandis que toutes les autres sont éliminées. Ainsi, les problèmes n'admettent généralement pas par eux-mêmes de solutions singulières : celles-ci n'existent qu'exceptionnellement, et, dans ce cas exceptionnel, on est toujours averti qu'il existe une solution singulière par le problème proposé lui-même ; au contraire, les équations différentielles admettent le plus souvent des solutions singulières [1].

---

[1] Les ouvrages classiques contiennent peu de détails concernant les solutions singulières ; pour cette raison, nous croyons devoir insister sur ce point important sans craindre de nous répéter.

Il faut se rappeler ce que nous avons déjà dit de la formation des équations différentielles. Nous ne considérons expressément que les équations pouvant représenter les énoncés de problèmes tels qu'ils se présentent dans la réalité ; il est donc nécessaire de distinguer le problème en lui-même de l'équation qui en représente l'énoncé. Ces deux choses, bien distinctes en elles-mêmes, n'en font qu'une seule au point de vue des applications, et c'est là le cas que nous envisageons exclusivement. Le problème est la chose donnée, le *fond* de la question, tandis que l'expression algorithmique n'en est que la *forme*. Une même forme peut appartenir à la fois à plusieurs problèmes différents, c'est-à-dire que l'interprétation d'une équation différentielle prise isolément offre une certaine indétermination.

Les équations contiennent ordinairement deux espèces de solutions : les solutions ordinaires peuvent satisfaire à un problème, tandis que les solutions spéciales ou singulières satisferont à un autre, et ce sont les conditions propres au problème qui font accepter ou rejeter une solution. En particulier, les conditions algorithmiques spéciales qui conduisent aux intégrales singulières doivent être la traduction de certaines conditions propres au problème dont il s'agit ; si ces conditions n'existent pas, les solutions singulières de l'équation, en tant qu'équation purement algorithmique, n'ont aucune interprétation, et l'intégrale générale existe seule, puisqu'elle n'exige aucune condition algorithmique spéciale.

Dans les équations différentielles, il n'y a qu'une seule intégrale générale, celle qui correspond aux seules constantes arbitraires ; toutes les autres, exigeant une ou plusieurs conditions algorithmiques spéciales, sont comprises sous le nom d'*intégrales singulières*. Ces conditions n'excluent pas ordinairement les constantes arbitraires des relations algorithmiques qui les expriment, bien que l'on ait énoncé quelquefois le contraire ; l'exemple que nous traitons montre que, si l'on considère l'équation primitive (s), on ne peut éliminer la constante arbitraire entre cette équation et sa dérivée, sans éliminer en même temps une fonction ; cette fonction se trouve être ainsi une fonction singulière.

En un mot, il ne faut donner à une équation différentielle que la signification

Si l'on considère les équations primitives singulières comme ne devant pas contenir de constantes arbitraires, on fait une restriction qui ne doit pas avoir lieu ordinairement, ou une confusion entre l'équation primitive générale et les équations primitives singulières, car l'existence de celles-ci ne dépend que de la possibilité de l'élimination de certaines fonctions qui sont quelconques, si l'on considère les équations différentielles en général; ces fonctions quelconques contiennent évidemment des constantes qui peuvent, de cette manière, se retrouver dans les équations primitives singulières. L'équation (c) en est un exemple.

Dans le problème que nous examinons, puisqu'il n'existe aucune condition spéciale, la solution qui convient est celle que nous avons obtenue par la méthode de Wronski.

La méthode ordinaire, qui consiste à déduire les intégrales singulières de l'intégrale générale, pourrait conduire à la relation qui donne la solution singulière; mais, ici, nous ne connaissons l'intégrale générale que sous la forme résolue $y = f(x)$, et $f(x)$ est un développement qui se prête difficilement à une comparaison avec l'intégrale singulière trouvée.

Remarquons encore que l'intégration ordinaire d'une équation différentielle conduit à une équation primitive qu'il faut ensuite résoudre : ce sont là deux problèmes dont on ne peut pas toujours obtenir la solution. La méthode de Wronski a cela d'avantageux qu'elle donne l'équation primitive toute résolue, et, comme elle donne aussi l'expression d'une fonction quelconque $F(y)$ de l'inconnue, on voit que l'on peut mettre encore l'équation primitive sous un nombre indéfini de formes différentes.

Profitons de la solution singulière (s) pour appliquer les formules que nous avons données dans la digression sur les séries, de (ι) à ($\varkappa$) et ($\alpha\alpha$), ($\alpha\beta$).

---

propre au problème qu'elle représente; cette signification est *nécessaire* et les autres interprétations qu'on pourrait en donner sont *contingentes;* cette distinction, tout évidente, justifie ce que nous venons de dire. Il en résulte que les interprétations géométriques des intégrales, telles qu'on les produit ordinairement, ont un simple caractère de contingence, à moins que les problèmes traités ne se rattachent spécialement à des questions de Géométrie.

Commençons par calculer l'intégrale singulière par la formule de Maclaurin : nous avons

$$aa \quad \left\{ \begin{aligned} y' &= -p(nx + y - b + c)y, \\ y'' &= -p[nx + 2y - b + c)y' + ny^2], \\ y''' &= -p[nx + 2y - b + c)y'' + 2ny' + 2y'^2], \\ y^{\text{iv}} &= -p[nx + 2y - b + c)y''' + 3ny'' + 6y'y''], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

puis, en faisant $x = 0$, $y = b$ et mettant pour les coefficients leurs valeurs numériques, il vient

$$\begin{aligned} y'_0 &= -0{,}6, \\ y''_2 &= +0{,}009, \\ y'''_0 &= -0{,}000675, \\ y^{\text{iv}}_0 &= +0{,}000074925. \end{aligned}$$

La formule de Maclaurin donne alors

$$ab \quad \left\{ \begin{aligned} y = 40 - x.0{,}6 + x^2.0{,}0045 - x^3.0{,}0001125 \\ + x^4.0{,}000003121875 - \ldots. \end{aligned} \right.$$

et pour $x = 5$ la valeur de y est

$$ac \quad \left\{ \begin{aligned} y = \;& 40 \\ & -\;3 \\ & \overline{37{,}0000} \\ & +\;0{,}1125 \\ & \overline{37{,}1125000} \\ & -\;0{,}0140625 \\ & \overline{37{,}0984375} \\ & +\;0{,}0019511 \\ & \overline{37{,}1003886} \end{aligned} \right.$$

Transformons la série (*ab*) par les formules (*t*) à (*z*) ; cette série, identifiée avec la série (*t*), pour $a = 0$, savoir

$$(ad) \qquad y = \mathfrak{A}_0 + x\mathfrak{A}_1 + x^2\mathfrak{A}_2 + x^3\mathfrak{A}_3 + \ldots,$$

sera transformée en une autre série équivalente de la forme (*t*),

$$(ad') \qquad y = A_0 + A_1\frac{x}{n+x} + A_2\left(\frac{x}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x}{n+x}\right)^3 + \ldots,$$

dans laquelle n est une quantité arbitraire, et, d'après (*z*), on a les relations

$$(ad'') \qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 = n\mathfrak{A}_1, \\ A_2 = n\mathfrak{A}_1 + n^2\mathfrak{A}_2, \\ A_3 = n\mathfrak{A}_1 + 2n^2\mathfrak{A}_2 + n^3\mathfrak{A}_3, \\ A_4 = n\mathfrak{A}_1 + 3n^2\mathfrak{A}_2 + 3n^3\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il reste à déterminer une valeur de n telle que la série, transformée ainsi, soit plus convergente que la série proposée (*ab*).

Il est facile de voir que la valeur de n la plus convenable est comprise entre 10 et 100, et le maximum de convergence a lieu à peu près pour $n = 60$. On a en effet, d'après (*ad''*), pour $n = 60$

$$\begin{aligned} A_1 &= -36 = -36, \\ A_2 &= -36 + 16{,}20 = -19{,}80, \\ A_3 &= -36 + 32{,}40 - 24{,}30 = 27{,}90, \\ A_4 &= -36 + 48{,}60 - 72{,}90 + 40{,}46 = -19{,}84. \end{aligned}$$

Pour $x = 5$, $\frac{x}{n+x} = \frac{1}{13}$, la série transformée est ainsi

$$(ab) \qquad y = 40 - \frac{36}{13} - \frac{19{,}80}{169} - \frac{27{,}90}{2197} - \frac{19{,}84}{28561},$$

ce qui donne

$$
(ac')\quad \left\{
\begin{array}{rl}
y = & 40,00000 \\
 & -\ 2,76923 \\
\hline
 & 37,23077 \\
 & -\ 0,11716 \\
\hline
 & 37,11361 \\
 & -\ 0,01270 \\
\hline
 & 37,10091 \\
 & -\ 0,00069 \\
\hline
 & 37,10022
\end{array}
\right.
$$

Pratiquement, il vaudrait mieux prendre $n = 50$ pour simplifier les calculs; on aurait

$$y = 37,10029.$$

On voit, d'après cela, que le développement de Maclaurin (ab), dans le cas actuel, n'est pas éloigné du maximum de convergence.

Calculons maintenant l'expression (s) qui contient une intégrale définie,

$$(ae)\qquad \int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2+p(b-c)x}\,dx.$$

En désignant l'exposant par P, la formule de Maclaurin donne, pour $x = 5$,

$$\int_0^5 e^{P}dx = 5 + \frac{5^2}{1.2}\,0,045 + \frac{5^3}{1.2.3}\,0,001125 - \frac{5^4}{1.2.3.4}\,0,00003375$$
$$- \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\,0,00000440437 + \ldots.$$

$$(af)\quad \int_0^5 e^{P}dx = 5 + 0,5625 + 0,0234375 - 0,0007910 - 0,0001147$$
$$= 5,5850318.$$

La formule de Bernoulli,

$$\int f(x)dx = \text{const} + \frac{x}{1}f(x) - \frac{x^2}{1.2}f'(x) + \ldots,$$

est ici plus convergente ; elle donne, avec six décimales exactes,

$$(af') \qquad \int_0^{,5} e^{p} dx = 5,585009,$$

par suite,

$$1 + 0,06 \int_0^{,5} e^{p} dx = 1,3351005_7,$$

et l'expression (s) devient

$$(ag) \qquad y = 40 \frac{1,23831}{1,335100} = 37,1000;$$

telle est la valeur de l'inconnue avec quatre décimales exactes.

Effectuons maintenant le même calcul au moyen des formules $(\alpha\alpha)$ et $(\alpha\beta)$ de la méthode primordiale, savoir :

$$(ah) \qquad \begin{cases} F(x) = F(a) + F'(a)\left[1 + (x-a)\dfrac{F''(x)}{2F'(x)}\right](x-a) \\ \qquad - \Xi_3\left(\dfrac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\dfrac{x-a}{n+x}\right)^4 + \ldots; \end{cases}$$

les coefficients Ξ, calculés d'après $(\alpha\beta)$, sont

$$(ah)' \qquad \begin{cases} \Xi_3 = (n+a)^3\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{[F''(a)]^2}{F'(a)} - \dfrac{1}{3}F'''(a)\right], \\ \Xi_4 = (n+a)^4\left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{[F''(a)]^3}{[F'(a)]^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{F''(a)F'''(a)}{F'(a)} - \dfrac{5}{24}F^{\text{IV}}(a)\right] + 3\Xi_3, \\ \Xi_5 = (n+a)^5\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{[F''(a)]^4}{[F'(a)]^3} - \left[\dfrac{F''(a)}{F'(a)}\right]^2 F'''(a) + \dfrac{1}{4}\dfrac{[F'''(a)]^2}{F'(a)}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{3}\dfrac{F''(a)F^{\text{IV}}(a)}{F'(a)} - \dfrac{3}{40}F^{\text{V}}(a)\right] + 4\Xi_4 - 6\Xi_3. \end{cases}$$

Faisons

$$F(x) = \int_0^x e^{p} dx,$$

avec $x = 5$ et $a = 0$, il vient

$$(ai) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{,5} e^{p} dx = 5,50625 + 0,0006375n^3\left(\frac{5}{n+5}\right)^3 \\ \qquad + (0,0019125n^3 - 0,00000126n^4)\left(\frac{5}{n+5}\right)^4 \\ \qquad + (-0,003825n^3 - 0,0000056n^4 - 0,0000000367n^5)\left(\frac{5}{n+5}\right)^5 + \ldots \end{cases}$$

Il reste à déterminer la valeur de n la plus convenable; et l'on aperçoit aisément que n doit être compris entre 100 et 1000. Il est même indifférent de prendre l'un ou l'autre nombre, car la variation de la convergence est très faible, dans cet intervalle, pour les autres valeurs de n.

En fait, ces deux valeurs conduisent au même résultat à $\frac{4}{100000}$ près.

	Pour $n = 100$.	Pour $n = 1000$.
$\int_0^5 e^p dx =$	5,506250	5,506250
	+ 0,068837	+ 0,078503
	5,575087	5,584753
	+ 0,009183	+ 0,000396
	5,584270	5,585149
	+ 0,000723	− 0,000115
	5,584993	5,585034

Nous obtenons ainsi la même approximation qu'avec la formule de Maclaurin, bien que celle-ci contienne un terme de plus. Cependant la formule de Wronski a exigé un calcul plus compliqué; il ressort de là que son emploi n'est réellement avantageux que lorsque l'on peut négliger la série complémentaire. Dans ce cas, le calcul devient très rapide [1].

Supposons que l'on connaisse la valeur de l'intégrale pour $x = 4,5$, sachant que

$$\left(\frac{de^p}{dx}\right)_5 = 0,0405(e^p)_5,$$

[1] On remarquerait même que souvent la série complémentaire est d'autant moins convergente que le *progrès*, donnant la génération de la fonction, représente mieux cette fonction; aussi Wronski indique-t-il comme avantageux l'emploi de la génération neutre. Il dit (*Réforme*, t. I, p. lxxiij) : « Avec les quantités A_1, A_2, A_3, ... (quantités qui sont les coefficients du développement de la fonction et qui comprennent à la fois les premiers termes et ceux de la série complémentaire), les ordres supérieurs de la génération neutre donneront, pour la fonction problématique $F(x)$, ..., une détermination très générale, et, comme telle, de beaucoup supérieure à celle.... que nous avons obtenue par l'application immédiate de la méthode primordiale. »

on en déduit la suivante, pour $x = 5$,

$$aj) \quad \int_0^5 e^p dx = \int_0^{4,5} e^p dx + (e^p)_{4,5}(1 + 0,25 . 0,0405) 0,5$$
$$= 4,97212 + 1,21333 . 1,010125 . 0,5 = 5,584931,$$

valeur exacte à $\frac{1}{10000}$ près.

La formule de Taylor conduit à un calcul plus long: on a

$$\left(\frac{de^p}{dx}\right)_{4,5} = 0,042975 \, (e^p)_{4,5},$$
$$\left(\frac{d^2 e^p}{dx^2}\right)_{4,5} = 0,001756 \, (e^p)_{4,5},$$

$$ak) \quad \int_0^5 e^p dx = \int_0^{4,5} e^p dx + (e^p)^{4,5}\left(0,5 + \frac{0,25}{2} 0,042975 + \frac{0,125}{6} 0,001756\right)$$
$$= 4,97212 + 1,21333 . 0,5054084 = 5,585350,$$

valeur exacte à $\frac{7}{10000}$ près.

Nous venons d'indiquer l'usage du premier *progrès* de la méthode primordiale; on pourrait de la même manière faire l'application du second et du troisième progrès, qui ont été donnés dans le Tome I de la *Réforme*, et le *Supplément à l'Épître à l'Empereur de Russie*, ou dans le troisième Volume de l'*Encyclopédie mathématique* de Montferrier; les expressions sont alors de plus en plus compliquées, mais on peut trouver avantage, dans certains cas, à les utiliser; de même, par une certaine combinaison du premier et du second progrès, on pourrait intégrer l'équation différentielle qui nous a servi d'exemple (*voir* la *Réforme*, t. I, p. 352).

Néanmoins, le premier progrès, à cause de la simplicité de son expression, sera souvent d'une application avantageuse. Wronski donne, au moyen de cette formule, un exemple de calcul de logarithmes à 10 décimales; il a d'ailleurs construit, ainsi, des Tables disposées sous forme de *canons* [1].

---

[1] Les canons à 7 décimales contiennent environ 1000 nombres; le premier

Mais là ne se borne pas l'application du premier progrès de la méthode primordiale : nous pensons qu'il devra servir encore utilement au calcul des Tables de sinus du second et du troisième ordre; ces Tables seront nécessaires le jour où l'on voudra appliquer les méthodes d'intégration de Wronski, et principalement la méthode secondaire systématique. Si l'on songe à la complication et à l'étendue des Tables à double entrée des fonctions elliptiques, ou autres fonctions analogues, on se convaincra facilement que les Tables des sinus devront être exécutées avec beaucoup plus de rapidité; elles seront très pratiques et d'un usage général, tandis que les premières ne seront que d'un usage restreint.

Nous avons préparé des Tables de sinus de telle sorte que les calculs puissent être exécutés immédiatement quand il sera nécessaire. Ajoutons que nous avons été précédé dans ce travail par M. Yvon Villarceau. Ce géomètre, au moyen de formules qui lui sont propres, a calculé, avec 12 décimales exactes, une suite de sinus du deuxième et du troisième ordre, formant ainsi un cadre pour des Tables plus étendues.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES NE CONTENANT QU'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Observation. — Avant de continuer l'exposition des méthodes d'intégration, nous devons indiquer l'ordre que nous allons suivre.

On sait, d'après ce qui précède, que l'intégration des équations linéaires à coefficients constants joue un rôle important dans les méthodes de Wronski. L'intégration des équations différentielles de cette

---

logarithme est celui de 100000, et les suivants ceux de 100125, 100205, etc., nombres qui s'obtiennent alors avec la plus grande facilité.

Dans le système de logarithmes à 7 décimales dont la base est 2, le canon a les dimensions de 305^{cm} sur 225^{cm}; il est formé de deux Tableaux correspondant aux deux parties dont est composée la portion décimale d'un logarithme. Ce canon a une étendue triple de celle des Tables ordinaires, et l'addition des deux parties du logarithme demande moins de temps que celui que l'on met à feuilleter la Table. Un canon de logarithmes vulgaires contient une partie de plus.

espèce, dans le cas d'une seule variable indépendante, est assez connue pour que n'ayons eu besoin que d'en rappeler les formules; mais pour les autres équations, les solutions, quoique données depuis longtemps, ne se trouvant pas dans les Ouvrages classiques, nous serons obligé de les traiter d'une façon particulière et même plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici. D'un autre côté, nous ne pourrions, sans perdre de vue la méthode de Wronski, donner de suite tout ce qui concerne l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, c'est pourquoi nous ne présenterons ici que ce qui est absolument nécessaire à la méthode, en indiquant toutefois comment on pourrait vérifier ou démontrer certaines formules dont il sera fait usage.

Désirant pousser les calculs jusqu'au point où il ne reste plus qu'à effectuer des opérations indiquées bien explicitement, nous entrerons de suite dans le détail des transformations relatives aux racines des équations caractéristiques. Nous avons reconnu que, en général, la transformation doit être faite au moyen de fonctions symétriques, et que les transformations faites au moyen de sinus d'ordre quelconque, ou même par d'autres procédés, ne sont que des transformations particulières; nous avons étudié le système complet de ces transformations et nous donnons ici, outre les formules d'intégration par les fonctions symétriques, la formule d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, au moyen de sinus d'ordres supérieurs. Quant aux fonctions symétriques, nous n'avons fait que compléter et étendre le moyen indiqué par Wronski dans sa *Critique des fonctions génératrices*, ce géomètre s'étant lui-même visiblement inspiré des travaux de Laplace. Néanmoins, nous sommes convaincu que Wronski avait achevé les calculs que nous avons dû rétablir nous-même.

Nous réservons pour une Note spéciale, qui paraîtra dès que le sujet présent sera achevé, les questions que nous ne pouvons à présent traiter d'une manière suffisante. Cette Note comprendra des notions sur les agrégats et sur leur emploi; ces sommes seront pour nous d'un usage aussi fréquent que celui des déterminants. Nous donnerons les formules de différentiation de fonctions de plusieurs variables, puis nous reviendrons sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, et nous reprendrons, pour ce qu'il nous importe de con-

naître, la théorie des fonctions symétriques pour en faire l'application aux sinus des ordres supérieurs.

L'étude de ces questions découle tout naturellement de la loi suprême de Wronski; d'après cela, nous aurions dû commencer par son exposition, mais les sujets que nous traiterons auparavant formeront une introduction très utile pour l'intelligence complète de cette loi remarquable. Nous pouvons dire qu'elle a été l'objet de notre première étude; c'est ce qui nous a permis d'entreprendre avec fruit le rétablissement des diverses méthodes d'intégration sur lesquelles Wronski ne nous a laissé que de simples indications.

Équations aux différences finies. — Considérons une équation qui contient une fonction inconnue y d'une variable indépendante x, ainsi que les différences des quantités x et y ne dépassant pas l'ordre μ; soit

$$\varphi(y) = 0$$

cette équation. Pour effectuer l'intégration, il faut trouver une expression de la fonction inconnue y qui rende identique l'équation proposée.

Nous avons vu que l'expression (22) [1] remplit cette condition, et qu'il est même nécessaire de lui substituer l'expression plus générale (22), savoir :

$$F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} - \ldots$$

w est ici une fonction arbitraire, qui néanmoins doit se rapprocher le plus possible de la fonction inconnue y, et $F(y)$ est une fonction quelconque mais donnée de y; cette fonction peut être une différence ou une dérivée de la quantité cherchée.

(1) Voir le n° de janvier 1882.

Sans reprendre les considérations que nous avons présentées à propos des équations différentielles, considérations qui se reproduisent ici, nous rappellerons que l'on doit former au moyen de l'équation donnée, en y introduisant une quantité arbitraire ω, une équation transformée

$$\varphi(y, \omega) = 0;$$

de la sorte, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, qui se trouve ainsi écrite :

$$\varphi(y, 1) = 0,$$

et pour $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$\varphi(y, 0) = 0.$$

Cette équation donne une première valeur de l'inconnue que nous avons désignée sous le nom de *valeur fondamentale* et que nous avons dénotée par ϖ.

L'équation réduite peut toujours être une équation aux différences finies à coefficients constants intégrable par des moyens connus : la valeur fondamentale ainsi obtenue conduit à l'intégrale générale de l'équation proposée ; il est clair que l'on peut former autrement l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Il reste maintenant à donner le détail des calculs que nous venons d'indiquer. Pour cela, mettons l'équation proposée, par hypothèse d'ordre μ, sous la forme

$$28 \qquad \Delta^{\mu} y \Pi_{\mu} + \Delta^{\mu-1} y \Pi_{\mu-1} + \ldots + \Delta y \Pi_1 + y \Pi_0 = \psi(x);$$

$\psi(x)$ est une fonction donnée de x, et les coefficients $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{\mu}$ peuvent être des fonctions de x de l'inconnue y et de leurs différences de divers ordres, jusqu'à l'ordre μ inclusivement. Il est évident que l'équation proposée peut toujours être mise sous cette forme et même

être écrite de la manière suivante,

$$(28') \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y \, \mathrm{H}_\sigma - \psi(x) = 0 \quad (^1),$$

en convenant de faire varier l'indice σ de zéro à μ.

Considérons les variations de l'inconnue y, ou même de $\mathrm{F}(y)$, correspondant à des valeurs de la variable x, comprises entre deux limites quelconques déterminées p et q; soit α la valeur de x correspondant à une valeur moyenne β de y dans les limites considérées (nous avons déjà précisé le sens que Wronski attache à cette expression de valeurs moyennes), et supposons ces deux valeurs α et β provisoirement connues. Si nous remplaçons dans le coefficient général H_σ les quantités x, y et leurs différences par leurs valeurs moyennes, nous obtiendrons une quantité h_σ qui sera le coefficient général de l'équation réduite : nous pouvons alors introduire la quantité arbitraire ω de manière à obtenir l'équation transformée

$$(29) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y \, h_\sigma \left(\frac{\mathrm{H}_\sigma}{h_\sigma} \right)^\omega - \psi(x) = 0.$$

Pour $\omega = 1$, cette équation donne l'équation proposée (28'), et pour $\omega = 0$ elle donne l'équation réduite

$$(30) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma w \, h_\sigma - \psi(x) = 0,$$

en changeant y en w d'après les notations adoptées. Maintenant, si nous désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(31) \qquad h_\mu m^\mu + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

comme on le sait, on a pour la valeur fondamentale, en dénotant par u

(1) Nous avons fait plus haut usage d'une notation différente pour indiquer la manière dont les termes varient dans la somme Σ; à l'avenir, nous nous conformerons à la notation de Wronski; l'indice joint à la lettre Σ indique la limite supérieure de l'indice variable σ.

la différence Δx,

$$(32)\qquad w = \Sigma_\mu (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[M_\sigma + N_\sigma \Sigma \psi(x) \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{1}{u}} \right];$$

N_σ a pour valeur

$$(32')\quad N_\sigma = \frac{1}{h_\mu (1 - m_\sigma)(m_\sigma - m_1)(m_\sigma - m_2)\ldots(m_\sigma - m_{\sigma-1})(m_\sigma - m_{\sigma+1})\ldots(m_\sigma - m_\mu)}.$$

M_σ est l'une des μ constantes arbitraires, et la somme entre crochets est une somme indéfinie prise par rapport à l'accroissement u, tandis que la somme Σ_μ se compose de μ termes en faisant varier l'indice σ de 1 à μ.

On peut, dans certains cas, trouver utile d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation transformée, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles ; la plus simple de ces fonctions est

$$s(1 + r)^{\frac{u}{x}},$$

s et r étant deux constantes à déterminer, de sorte que l'équation transformée sera

$$(33)\qquad \sum_\mu \Delta^\sigma y h_\sigma \left(\frac{H_\sigma}{h_\sigma} \right)^\omega - \psi(x) - (1 - \omega) s (1 + r)^{\frac{x}{u}} = 0,$$

et l'équation réduite devient

$$(34)\qquad \sum_\mu \Delta^\sigma w h_\sigma - \psi(x) - s(1 + r)^{\frac{x}{u}} = 0.$$

De cette manière, en supposant nulle la fonction $\psi(x)$ et en négligeant les constantes, on a

$$(35)\quad w = \sum_\mu s(1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} N_\sigma \sum \left(\frac{1 + r}{1 + m_\sigma} \right)^u = s(1 + r)^{\frac{x}{u}} \sum_\mu N_\sigma \frac{1 + m_\sigma}{m_\sigma - r}.$$

Afin de pouvoir appliquer maintenant la formule (22), il reste à cal-

culer les différences et les dérivées de l'expression (32); on aura

$$(36)\quad \Delta^{\varpi} w = \sum_{\sigma} (1+m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[m_\sigma^{\varpi} M_\sigma + N_\sigma \sum \Delta^{\varpi} \psi(x) \left(\frac{1}{1-m_\sigma} \right)^{\frac{t}{u}} \right],$$

puis

$$(36)'\quad \frac{d^{\nu} w}{dx^{\nu}} = \sum_{\sigma} (1+m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[\frac{L^{\nu}(1+m_\sigma)}{u^{\nu}} M_\sigma + N_\sigma \sum \frac{d^{\nu}\psi(x)}{dx^{\nu}} \left(\frac{1}{1+m_\sigma} \right)^{\frac{t}{u}} \right].$$

et enfin

$$(36)''\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{\nu}\Delta^{\varpi} w}{dx^{\nu}} = & \sum_{\sigma} (1+m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \\ & \times \left[\frac{L^{\nu}(1+m_\sigma)}{u^{\nu}} m_\sigma^{\varpi} M_\sigma + N_\sigma \sum \frac{d^{\nu}\Delta^{\varpi}\psi(x)}{dx^{\nu}} \left(\frac{1}{1+m_\sigma} \right)^{\frac{t}{u}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne peuvent être utilisées que si toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, car autrement, s'il existe des racines imaginaires, il se trouvera dans les expressions précédentes des parties imaginaires qu'il faudra grouper convenablement afin d'obtenir des valeurs réelles de w. Ces transformations, bien connues dans le cas d'équations différentielles, le sont moins quand il s'agit d'équations contenant des différences: aussi nous allons les reprendre rapidement.

Transformations relatives aux quantités imaginaires. — Le principe qui va nous servir de point de départ consiste à substituer dans l'expression fondamentale (32), aux racines de l'équation caractéristique, des fonctions symétriques de ces racines; cette manière d'opérer aura l'avantage d'éviter la résolution d'une équation algébrique.

Posons

$$(37)\qquad n = 1 + m \quad \text{et} \quad \frac{x}{u} = \zeta,$$

l'équation caractéristique sera remplacée par l'équation suivante, dont les racines sont $m_1, m_2, \ldots$, augmentées de l'unité,

$$(38)\qquad k_\mu n^\mu + k_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + k_0 = 0.$$

en faisant

$$(38)' \quad \left\{ \begin{aligned} & h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots + (-1)^{\mu} h_\mu = k_0, \\ & h_1 - 2h_2 + 3h_3 - \ldots + (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} h_\mu = k_1, \\ & h_2 - 3h_3 + \ldots + (-1)^{\mu-2} \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} h_\mu = k_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & h_\mu = k_\mu. \end{aligned} \right.$$

Cette équation caractéristique (38) correspond à l'équation

$$(39) \quad k_\mu f(x + \mu u) + k_{\mu-1} f[x + (\mu - 1)u] + \ldots + k_0 f(x) = \psi(x),$$

si l'on pose

$$f(x) = w.$$

Wronski, dans sa *Critique des fonctions génératrices,* part de cette équation pour effectuer l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients constants; l'équation (39) donne, si l'on appelle w_1 la solution sans constantes arbitraires,

$$(40) \quad w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N k_\mu} \sum_{\sigma}^{\mu} (-1)^{\nu-1} N'_\sigma n_\sigma^x \sum \psi(x) \left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^x,$$

en faisant

$$(40)' \quad N = \Theta(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\mu^\mu) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \Pi(n_\sigma) \Pi(n_\sigma - n_\nu);$$

Π indique le produit des quantités entre parenthèses, et l'ordre des indices ν est l'ordre numérique, comme nous l'avons déjà indiqué pour (32)'; de plus, N'_σ est un des déterminants mineurs de N ordonné par rapport aux puissances μ des racines, ce qui donne

$$(40)'' \quad \frac{N'_\sigma}{N} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{n_\sigma \Pi(n_\sigma - n_\nu)}.$$

Si $\psi(x)$ est nul, la somme indéfinie pour une valeur particulière de σ

se réduit à une constante arbitraire; en ajoutant cette dernière solution à la solution (40), on retrouverait la solution (32).

L'expression (40) s'établit directement; on peut aussi vérifier facilement qu'elle satisfait à l'équation (39). Cette expression développée donne

$$w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{k_\mu} \sum \psi(x + \sigma u) \left[\frac{N_1}{N} n_1^\sigma + \frac{N_2}{N} n_2^\sigma + \ldots + (-1)^{\mu-1} \frac{N_\mu}{N} n_\mu^\sigma \right],$$

et comme, d'après un théorème que nous avons énoncé (14 janvier 1881) on a, pour p positif ou négatif,

$$(41) \qquad \aleph(p) = \frac{(\mathrm{D}) n_1^p n_2^p \ldots n_{\mu-1}^{\mu-1} n_\mu^{\mu-p}}{N},$$

il vient, en faisant $-\xi = +\mu - p$ et prenant ξ et p négatifs,

$$(42) \qquad w_1 = \frac{1}{k_\mu} \sum \psi(x + \sigma u) \aleph(-\xi);$$

Σ est une somme indéfinie dans laquelle ξ varie de zéro à $+\infty$, et les fonctions $\aleph$ sont ici des fonctions aleph négatives.

Il reste à tenir compte des constantes arbitraires, c'est-à-dire de l'expression

$$(43) \qquad w_2 = M_1 n_1^\sigma + M_2 n_2^\sigma + \ldots + M_\mu n_\mu^\sigma,$$

qui est aussi comprise dans l'expression (32). D'après l'origine des constantes, ainsi que nous venons de le dire et d'après leurs valeurs arbitraires, nous devons écrire le second membre de (43) sous la forme

$$(44) \qquad \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\sigma + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\sigma + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\sigma,$$

en désignant par N le déterminant de (40), et par $N_1^{(\lambda)}$, $N_2^{(\lambda)}$, ... des fonctions de $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ telle que l'expression totale soit une fonction symétrique de ces quantités; de la sorte, si l'on représente par Z_λ l'expression (44) et par P_λ une nouvelle constante arbitraire,

$P_\lambda Z_\lambda$ est une valeur particulière de (43); par suite, $P_1, P_2, \ldots, P_\mu, Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ étant μ constantes et μ fonctions analogues à (44), on peut écrire (43) de la manière suivante :

$$(43)' \qquad w_2 = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_\mu Z_\mu.$$

Il est évident que, si l'on pose

$$(45) \qquad n^\zeta = Z_1 + nZ_2 + n^2 Z_3 + \ldots + n^{\mu-1} Z_\mu,$$

en donnant à n successivement les μ valeurs qui satisfont à l'équation (38), on obtient μ équations linéaires, lesquelles, par leur résolution, donnent pour l'une des fonctions Z_λ,

$$(46) \qquad Z_\lambda = \frac{\Theta(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta-1} \ldots n_\mu^\mu)}{\aleph}.$$

Le second membre développé par rapport à $n_1^\zeta, n_2^\zeta, \ldots$ est bien de la forme (44), et les quantités Z sont, de cette manière, des fonctions symétriques des racines de (38). D'après un théorème sur les fonctions aleph, que nous démontrerons plus tard (le théorème (41) n'en est qu'un cas particulier), on a

$$(46)' \qquad \frac{\Theta(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{\aleph} k_\mu = \aleph(\zeta - \mu + 1)\, k_\lambda + \aleph(\zeta - \mu + 2)\, k_{\lambda-1} + \ldots + \aleph(\zeta - \lambda + 1)\, k_\mu.$$

$\aleph$ ayant toujours la valeur (40)'.

Donc, d'après (46) et (46)', on peut écrire (43)'

$$w_2 k_\mu = (P_1 k_1 + P_2 k_2 + \ldots + P_\mu k_\mu)\aleph(\zeta - \mu + 1) + (P_1 k_2 + P_2 k_3 + \ldots + P_{\mu-1} k_\mu)\aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + P_1 k_\mu \aleph(\zeta),$$

ou, en représentant par $Q_1, Q_2, \ldots$ les nouvelles constantes, on a

$$(47) \qquad w_2 k_\mu = Q_1 \aleph(\zeta - \mu + 1) + Q_2 \aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + Q_\mu \aleph(\zeta);$$

par suite, la solution complète de l'équation linéaire à coefficients

constants (30) peut s'écrire, en réunissant les deux quantités ϖ_1 et ϖ_2, (42) et (47),

$$(48)\qquad \varpi = \frac{1}{k_\mu}\sum_\mu Q_\sigma \aleph\left(\frac{x}{u} - \mu + \sigma\right) + \frac{1}{k_\mu}\sum \psi(x + \sigma u)\aleph(-\xi).$$

La première somme se compose de μ termes, la seconde est une somme indéfinie, et l'expression entière ne contient que des fonctions symétriques des racines de l'équation (38), et par conséquent de l'équation caractéristique (31).

Nous sommes obligé de passer rapidement sur ce qui précède : une exposition complète exigerait des développements que nous réservons pour une Note spéciale. Nous ajouterons cependant quelques remarques.

Les transformations précédentes supposent essentiellement que les racines de l'équation caractéristique soient toutes différentes; il faudrait modifier ces transformations dans le cas des racines égales.

Les propositions (41) et (46) peuvent se démontrer de plusieurs manières; la première peut être considérée comme un corollaire de la relation (*de*)'' que Wronski donne dans l'*Introduction à la philosophie des Mathématiques*, p. 144; (46) peut aussi s'en déduire. Quant au calcul des fonctions $\aleph$, Wronski donne le moyen de les calculer dans le Tome III de la *Réforme*, p. 28 à 31; nous indiquerons les diverses formes que l'on peut donner aux expressions de ces fonctions. Pour l'instant, il suffit d'indiquer les suivantes; on a la relation générale des fonctions $\aleph$ positives ou négatives, c'est-à-dire quel que soit le nombre entier p, en considérant les racines d'une équation algébrique; (31) par exemple, est

$$(49)\quad h_\mu \aleph(p) + h_{\mu-1}\aleph(p-1) + h_{\mu-2}\aleph(p-2) + \ldots + h_0\aleph(p-\mu) = 0;$$

de plus, en se reportant à la relation (41), on trouve les valeurs particulières

$$(49)'\quad \aleph(0) = 1,\quad \aleph(-1) = 0,\quad \aleph(-2) = 0,\quad \ldots,\quad \aleph(-\mu+1) = 0;$$

la relation (49) permet donc de calculer une fonction quelconque $\aleph(p)$ ou $\aleph(-p)$, en tenant compte des valeurs particulières (49)'.

Les transformations que nous venons de donner s'appliquent directement aux équations aux différences ou aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants, comme nous le montrerons; on pourrait aussi les appliquer aux équations différentielles ordinaires, au lieu d'employer des sinus pour faire disparaître les imaginaires, selon l'usage.

Il est inutile de donner ici ces formules : on ne trouverait aucun intérêt à les employer, car, les transformations par les fonctions symétriques devant nécessairement conduire à des fonctions transcendantes, on ne pourrait obtenir que des expressions sans forme indéfinie, tandis que les sinus dont on possède des tables peuvent toujours être utilisés et facilitent considérablement les calculs.

Dans le cas d'équations qui contiennent des différences, équations linéaires à coefficients constants, on pourrait encore grouper deux à deux les racines imaginaires de l'équation caractéristique, au lieu de faire usage de l'expression (48); mais ici l'avantage que nous venons de signaler pour les sinus n'existe plus; néanmoins, suivant les cas, il faudra choisir entre le groupement des racines et la transformation précédente.

Au reste, le groupement des racines imaginaires deux à deux n'est qu'un groupement particulier; M. Yvon Villarceau a montré, dans le cas d'équations différentielles, comment devaient intervenir les sinus des ordres supérieurs dans le groupement d'un nombre quelconque de racines. Depuis la publication du Mémoire de ce géomètre, bien que des travaux aient été faits sur la question, nous n'avons pas connaissance que l'on ait donné la solution générale de ce problème; pour cette raison, nous croyons pouvoir l'indiquer ici. A cet effet, les racines de l'équation caractéristique (17) doivent être mises sous la forme

$$m = a_0 + a_1\rho + a_1\rho^2 + \ldots + a_{\mu-1}\rho^{\mu-1}, \tag{50}$$

ρ étant l'une des racines $\mu^{\text{ièmes}}$ de l'unité positive, et $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$, μ quantités qui sont les mêmes pour les μ racines de la caractéristique. On sait former ces quantités a pour l'équation du troisième degré, et Wronski a donné leur formation pour les degrés supérieurs; ces quan-

tités sont toutes réelles, quand les μ racines sont imaginaires. Pour transformer l'expression (17'), il suffit maintenant d'introduire les expressions de chacune des racines sous la forme (50) dans les déterminants, $N, N_1, N_2, \ldots$. Sans tenir compte des constantes arbitraires, (17)' est

$$(51)\qquad w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{h_\mu N}\sum_\mu (-1)^{\sigma-1} N_\sigma e^{m_\sigma x}\int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx.$$

Cette somme est composée de μ termes; elle s'obtient en faisant varier l'indice σ de 1 à μ. Les déterminants $N, N_1, N_2, \ldots$ sont formés comme ceux de (40') et (40''), au produit près des racines.

En effectuant les calculs, on trouve

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} w_1 &= \frac{(-1)^{\mu-1} e^{a_0 x}}{h_\mu \omega(-B_1^1 B_2^2 \ldots B_{\mu-1}^{\mu-1})} \\ &\quad \times \sum_\mu \Big\{ (-1)^\sigma \omega(-B_{\sigma_1}^1 \ldots B_{\sigma_{\mu-2}}^{\mu-2}) \\ &\qquad \times \sum_\tau \Big[(-1)^t A_\tau \int \psi(x) e^{-a_0 x} A'_{\tau'} dx \Big] \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Σ_σ est la somme de tous les termes qui diffèrent par la valeur de σ, σ variant de 1 à $\mu - 1$, et Σ_τ est la somme de tous ceux qui diffèrent par la valeur de τ, τ variant de zéro à $\mu - 1$; les indices τ et τ' sont liés par la condition

$$(53')\qquad \tau + \tau' = t\mu - \sigma,$$

équation indéterminée qu'il faut résoudre en nombres entiers positifs. De plus, on a

$$(53)\qquad A_\tau = A_{gr}(-1)^{q\mu} S_{p_1}(a_1 x) S_{p_2}(a_2 x) \ldots S_{p_{\mu-1}}(a_{\mu-1} x),$$

avec la condition

$$(53'')\qquad 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (\mu-1)p_{\mu-1} = q\mu + \tau;$$

q est un nombre entier, et les indices $p_1, p_2, \ldots$ peuvent être ensemble ou séparément $0, 1, 2, \ldots (\mu - 1)$; S_p est le $p^{\text{ième}}$ sinus d'ordre

$(\mu - 1)$ [1]; d'après cette notation, S_0 ou S_μ représente le cosinus, et dans le cas présent les sinus sont du genre elliptique quand l'indice de a, dont ils sont fonctions, est impair, et du genre hyperbolique quand cet indice est pair. Les quantités A' sont les mêmes que les quantités A, sauf qu'il faut y changer le signe de x. Nous avons déjà indiqué la formation des agrégats; nous ne nous y arrêtons pas. Enfin on a encore

$$(54) \qquad B_\sigma^{(\lambda)} = (-1)^{\lambda+1} A_{g'} \left[(-1)^{\mu} \frac{a_0^{p_0} . a_1^{p_1} . a_2^{p_2} \ldots a_{\mu-1}^{p_{\mu-1}}}{1^{p_0} 1^{p_1} 1^{p_2} \ldots 1^{p_{\mu-1}}} \right],$$

les indices p devant satisfaire en nombres entiers positifs aux conditions

$$(54') \qquad \begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{\mu-1} = \lambda, \\ 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (\mu - 1)p_{\mu-1} = q\mu + \sigma. \end{cases}$$

Si la fonction $\psi(x)$ est nulle, l'expression (52) devient

$$(55) \qquad \omega_2 = \Sigma_\mu A_\tau M_\tau,$$

M_τ étant une des μ constantes arbitraires, et τ variant de 1 à μ.

Ces expressions ne sont, en réalité, que l'indication des calculs à effectuer; on peut facilement le vérifier sur l'équation du troisième degré. Soit ainsi $\mu = 3$; on a

$$\Theta(B_1^1 B_2^2) = a_1(a_1^2 - 2a_0 a_2) - a_2(a_0 - a_2^2 - 2a_0 a_1);$$

pour $\sigma = 1$,

$$\Theta(B_2^1) = a_2;$$

pour $\sigma = 2$,

$$\Theta(B_1^1) = a_1$$

---

(1) Nous aurions voulu conserver la notation des sinus adoptée par M. Yvon Villarceau, mais Wronski ayant en partie fait usage de la même notation pour représenter d'autres fonctions, nous avons cru devoir désigner les sinus par la lettre majuscule S, avec un indice convenable. Nous représentons ensuite les sinus du genre elliptique par la lettre de ronde $\mathcal{S}$, et les sinus du genre hyperbolique par la lettre gothique $\mathfrak{S}$. Les cosinus sont alors S_0, $\mathcal{S}_0$, $\mathfrak{S}_0$ ou S_μ, $\mathcal{S}_\mu$, $\mathfrak{S}_\mu$, ou encore C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, quand il devient nécessaire de les distinguer des sinus.

La relation (52)' donne

$$1^\circ \qquad \sigma = 1 \begin{cases} \tau = 0, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 0, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 2, & t = 1; \end{cases}$$

$$2^\circ \qquad \sigma = 2 \begin{cases} \tau = 0, & \tau' = 2, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 0, & t = 0. \end{cases}$$

Enfin, pour les divers indices τ, (53) donne

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathfrak{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \mathfrak{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \mathfrak{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x, \\ A_1 &= \mathfrak{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \mathfrak{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \mathfrak{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x, \\ A_2 &= \mathfrak{S}_0 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \mathfrak{S}_1 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \mathfrak{S}_2 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x; \end{aligned}$$

pour l'indice τ', il faut changer x en $-x$; d'après la remarque que nous avons faite, le premier sinus dans chaque terme est du genre elliptique et le second est du genre hyperbolique. Le reste du calcul s'achèverait sans difficulté.

Les calculs à effectuer directement comme vérification, dans le cas de l'équation du troisième degré, sont identiques à ceux qui conduisent à l'expression (52); pour cette raison, il est inutile d'insister davantage : ils se réduisent en définitive à des transformations de déterminants. Disons cependant que ces calculs portent en partie sur des fonctions symétriques des racines de l'unité, de la forme

$$\sum \rho_1^\alpha \rho_2^\beta \rho_3^\gamma \cdots$$

Ces fonctions se rencontrent constamment quand on veut établir la théorie des sinus d'un ordre μ : aussi avons-nous déterminé l'expression générale de ces fonctions; néanmoins elle n'est pas indispensable ici. Cette expression, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 22, du 30 mai 1881, peut être obtenue de plusieurs manières; nous sommes même parvenu à l'expression de la

fonction symétrique plus générale dans laquelle $\rho_1, \rho_2, \ldots$ représentent les racines d'une équation algébrique quelconque. On n'ignore pas que les géomètres, depuis plus d'un siècle, ont inutilement cherché la solution de ce problème, et qu'ils ont dû alors se borner à calculer des tables de coefficients. Nous pourrons donner plus tard cette solution à titre de curiosité, car l'énoncé du problème dont il s'agit n'est pas conforme au véritable objet de la théorie des fonctions symétriques; par cette solution, on aura une fois de plus la preuve que les principes de Wronski permettent de résoudre les questions réputées les plus difficiles.

Pour en revenir à l'expression (48), il nous reste à calculer ses différences et ses dérivées par rapport à la variable x. Il suffit, dans les termes qui dépendent de $\psi(x)$, de remplacer cette fonction par la différence $\Delta^\nu\psi(x)$ que l'on considère; il en serait de même de la dérivée. Dans les termes indépendants de $\psi(x)$, comme on a

$$\Delta n^\nu = n^\nu(n-1),$$

on voit que chaque terme donne lieu à deux nouveaux termes; pour la seconde différence on aurait trois termes, et ainsi de suite, tous ces termes provenant du développement des puissances de $n-1$. Enfin, pour les dérivées, comme on rencontre le logarithme de n, on aurait une suite illimitée de termes de même espèce que les précédents. Il convient donc d'après cela, pour avoir une certaine uniformité dans les expressions que nous voulons obtenir, de transformer les fonctions $\aleph$, qui sont formées avec les coefficients k de l'équation (38), en fonctions $\aleph$ formées avec les coefficients h de l'équation (31).

On a, en remplaçant n par $1+m$,

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(n_1^1\ldots n_\lambda^{-\sigma})}{N} &= \frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{-\sigma})}{N} - \frac{\sigma}{1}\frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{-\sigma-1})}{N} \\ &\quad + \frac{\sigma(\sigma+1)}{1.2}\frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{-\sigma-2})}{N} - \ldots \\ &= \sum(-1)^\nu\frac{\sigma^{\nu\,1}}{1^{\nu\,1}}\frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{-\sigma-\nu})}{N}.\end{aligned}$$

Cette somme indéfinie a ses termes formés au moyen de l'indice ν, qui varie de zéro à $+\infty$, et N′ est le déterminant N dans lequel n est remplacé par m.

L'expression (42) donne ainsi, en faisant $-\varsigma = -\mu - \sigma$,

$$(56)\qquad \varpi_1 = \frac{1}{h_\mu}\sum_{\nu}\left[\psi(x+\sigma u)\sum(-1)^{\nu}\frac{\pi^{\nu}}{1^{\nu}\,\nu!}\aleph(-\varsigma-\nu)\right].$$

Passons à la seconde expression; on a, pour la fonction Z_λ ou son équivalent, en vertu de (46),

$$\frac{\Theta(n_1^1\ldots n_\lambda^{\zeta-1}\ldots n_\mu^\mu)}{N} = \frac{\zeta^{\lambda-1|-1}}{1^{\lambda-1|1}} + \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{\mu+1}\ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$
$$\times\frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{\mu+2}\ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \ldots + \frac{\Theta(m_1^1\ldots m_\lambda^{\zeta+1}\ldots m_\mu^\mu)}{N'}.$$

Maintenant, en formant les quantités P_1Z_1, P_2Z_2, ... et faisant leur somme, puis remplaçant les rapports de déterminants par les fonctions $\aleph$, d'après (46)′ (en tenant compte toutefois de ce que les coefficients k doivent être remplacés par les coefficients h, puisque l'on substitue les racines m aux racines n), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(P_1 + P_2\frac{\zeta}{1} + P_3\frac{\zeta(\zeta-1)}{1.2} + \ldots + P_\mu\frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right)\aleph(0)\\
&+\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(P_1h_1 + P_2h_2 + \ldots + P_\mu h_\mu)\aleph(1)\\
&+\left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(P_1h_2 + P_2h_3 + \ldots + P_{\mu-1}h_\mu) + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}P_1h_1 + \ldots + P_\mu h_\mu)\right]\aleph(2) + \ldots\\
&+\left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}P_1h_\mu + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}(P_1h_{\mu-1} + P_2h_\mu) + \cdots + \frac{\zeta^{2\mu-1|-1}}{1^{2\mu-1|1}}(P_1h_1 + \cdots + P_\mu h_\mu)\right]\aleph(\mu) + \cdots\\
&+\frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}}P_1h_\mu\aleph(\zeta).
\end{aligned}$$

Faisons, pour abréger,

$$(57)\qquad \begin{cases}
Q_1 = P_1h_1 + P_2h_2 + \ldots + P_\mu h_\mu,\\
Q_2 = P_1h_2 + P_2h_3 + \ldots + P_{\mu-1}h_\mu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_\mu = P_1h_\mu,
\end{cases}$$

l'expression précédente devient

$$\left(P_1 + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right)\aleph(0) + \frac{\zeta^{\mu-1}}{1^{\mu|1}} Q_1 \aleph(1)$$
$$+ \left(\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_2 + \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_1\right)\aleph(2) + \ldots + \frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}} Q_\mu \aleph(\zeta).$$

Faisons encore, pour abréger,

$$(58)\quad \begin{cases} R_\sigma = \dfrac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_\sigma + \dfrac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_{\sigma-1} + \ldots + \dfrac{\zeta^{\mu+\sigma-1|-1}}{1^{\mu+\sigma-1|1}} Q_1, \\ R_0 = P_1 + P_2 \dfrac{\zeta}{1} + P_3 \dfrac{\zeta^{2|-1}}{1^{2|1}} + \ldots + P_\mu \dfrac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}; \end{cases}$$

on a définitivement

$$(59)\qquad \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_\zeta R_\sigma \aleph(\sigma).$$

Σ est ici une intégrale définie dont les limites sont zéro et ζ.

L'expression (59) est générale, car si l'indice de Q, dans (58), est plus grand que μ, ce coefficient est nul d'après (57); quant à la factorielle ζ^{p-1}, elle est nulle si $p > \zeta$, car elle contient le facteur $(\zeta - \zeta)$, c'est-à-dire zéro. Si $\zeta < \mu$, la valeur de ϖ_2 se réduit à R_0, à cause des factorielles qui sont nulles; si ζ est négatif, l'intégrale est évidemment indéfinie, puisque le développement de $(1 + m)^\zeta$, qui était limité pour ζ positif, devient indéfini pour ζ négatif.

D'après ce qui précède, on passe facilement aux différences de ϖ_2. En effet, la différence de n^ζ est $m.n^\zeta$; par suite, l'expression de ΔZ_λ est

$$\frac{\Theta[n_1^1 \ldots n_\lambda^{\lambda-1}(m_\lambda n_\lambda^{\zeta+1}) n_{\lambda+1}^{\lambda+1} \ldots n_\mu^\mu]}{N}$$
$$= \frac{\zeta^{\lambda-2|-1}}{1^{\lambda-2|1}} + \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} \frac{\Theta(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\mu+1} \ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \ldots + \frac{\Theta(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\zeta+2} \ldots m_\mu^\mu)}{N'}.$$

En achevant le calcul comme plus haut, on trouverait

$$R'_\sigma = \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} Q_\sigma + \ldots + \frac{\zeta^{\mu+\sigma-2|-1}}{1^{\mu+\sigma-2|1}} Q_1,$$

$$R'_0 = P_2 + P_3 \frac{\zeta}{1} + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}},$$

et par suite

$$\Delta \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+1} R'_\sigma \aleph(\sigma);$$

l'intégrale a pour limites zéro et $\zeta + 1$ pour les valeurs positives des ζ, elle est indéfinie pour les valeurs négatives de la variable.

En continuant de la même manière, on aurait

$$(60)\quad \begin{cases} R_\sigma^{(\nu)} = Q_\sigma^{(\nu)} + \frac{\zeta}{1} Q_{\sigma-1}^{(\nu)} + \ldots + \frac{\zeta^{\sigma-1|-1}}{1^{\sigma-1|1}} Q_1^{(\nu)} \\ R_0^{(\nu)} = P_{\nu-1} + P_{\nu+2} \frac{\zeta}{\zeta} + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1-\nu|-1}}{1^{\mu-1-\nu|1}}, \end{cases}$$

et la différence est

$$(61)\quad \Delta^\nu \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+\nu} R'_\sigma \aleph(\sigma),$$

l'intégrale s'étendant de zéro à $\zeta + \nu$, pour les valeurs positives de ζ, ou pouvant être regardée comme indéfinie pour les valeurs négatives de cette variable.

L'expression des coefficients R est générale, par la raison que nous avons donnée plus haut.

Cette formule (61) permet de passer à l'expression des dérivées. En effet, on a $\frac{1}{u} n^\zeta \mathrm{L}n$, pour la dérivée de n^ζ; en développant donc le logarithme, il vient

$$\mathrm{L}n = m - \tfrac{1}{2} m^2 + \tfrac{1}{3} m^3 - \ldots,$$

et l'on retombe, par suite, sur des transformations identiques aux précédentes; il en résulte

$$(62)\quad \frac{dv_2}{dx} = \frac{1}{u}\left(\Delta \varpi_2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \varpi_2 + \frac{1}{3} \Delta^3 \varpi_2 - \ldots\right).$$

Les autres dérivées dépendent du développement des puissances du logarithme; Wronski a donné des formules permettant d'obtenir les puissances des polynômes quel que soit le nombre de leurs termes. Il est inutile d'insister davantage sur ces transformations, dont on doit avoir saisi l'esprit.

Suite du calcul de l'inconnue. Détermination des constantes. — Revenons à la question principale. Au moyen des expressions (35) à (36)'', ou des mêmes expressions transformées comme nous venons de le faire, il est facile de calculer les divers coefficients H de la fonction $\varphi(y)$; désignant par un accent les valeurs particulières que prennent ces coefficients quand on remplace y par w, on obtient

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(w) &= \sum_{\mu} \Delta^{\sigma} w \mathrm{H}'_{\sigma} - \psi(x), \\ \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) &= \sum_{\mu} \frac{d\Delta^{\sigma} w}{dx} \mathrm{H}'_{\sigma} + \sum_{\mu} \Delta^{\sigma} w \left(\frac{d^2 \mathrm{H}_{\sigma}}{dx}\right), \\ \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= \sum_{\mu} \frac{d^2\Delta^{\sigma} w}{dx^2} \mathrm{H}'_{\sigma} + 2\sum_{\mu} \frac{d\Delta^{\sigma} w}{dx}\left(\frac{d\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx}\right) + \sum_{\mu} \Delta^{\sigma} w \left(\frac{d^2 \mathrm{H}'_{\sigma}}{dx^2}\right), \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. On doit se rappeler que les dérivées entre parenthèses ne sont prises que sur les fonctions de w seulement. Si l'on tient compte des dérivées totales de $\varphi(w)$, comme nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles, les dérivées précédentes deviennent

$$(63)'\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) &= \sum_{\mu} \Delta^{\sigma} w \left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx}\right], \\ \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= 2\sum_{\mu} \frac{d\Delta^{\sigma} w}{dx}\left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx}\right] + \sum_{\mu} \Delta^{\sigma} w \left[\left(\frac{d^2\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx^2}\right) - \frac{d^2\mathrm{H}'_{\sigma}}{dx^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

On calculerait aussi les dérivées de $\mathrm{F}(w)$. Les dérivées de $\varphi(w)$ et de $\mathrm{F}(w)$ [1], portées dans l'expression (22), savoir :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(w) &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{[\varphi(w)]^2}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2\mathrm{F}(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right)\right] - \ldots \end{aligned}\right.$$

---

(1) On introduit de cette manière les dérivées $\frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}, \ldots$; ces quantités peuvent se déduire de la valeur fondamentale (32), mais le moyen le plus convenable, eu égard à la convergence de l'expression (22), consiste à les obtenir par

donnent l'expression de la fonction inconnue $F(y)$, cette fonction pouvant se réduire à y, à une dérivée ou à une différence de y. Nous rappelons que cette expression se déduit de (3), en remplaçant les différentielles par des dérivées prises par rapport à x, d'après les formules (19), (20) et (21).

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction y, ou de $F(y)$, est donnée exactement par l'équation réduite; donc, pour la valeur moyenne de y, l'expression (64) se réduit à son premier terme, les autres étant nuls. Pour les valeurs voisines de cette valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (64) est très convergente, et cette convergence diminue à mesure que la fonction inconnue s'éloigne de cette valeur: aussi la valeur moyenne de y doit-elle être choisie, autant que possible, de manière à représenter la moyenne des valeurs de la fonction cherchée, dans les limites dont on a besoin.

Si, pour certaines valeurs de la fonction, l'expression (64) n'était plus assez convergente pour l'approximation que l'on désire, ou encore si elle était divergente, il faudrait transformer l'expression donnée au moyen des formules de la génération neutre, ou au moyen de la méthode d'exhaustion, ou par tout autre moyen que nous avons déjà indiqué. Dans le cas de la méthode d'exhaustion, l'expression (22), ou (64), prend la forme (27), et les valeurs des quantités Δw_1, $\Delta^2 w_1, \ldots, \frac{dw_1}{dx}, \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d\Delta w_1}{dx}, \frac{d\Delta w_1}{dx^2}, \ldots$, s'en déduisent en faisant la fonction F égale à l'une de ces quantités; ainsi l'on aurait, pour $\frac{d\Delta w_1}{dx}$,

$$\frac{d\Delta w_1}{dx} = \frac{d\Delta w}{dx} - \frac{\varphi(w, \omega)}{\left(\frac{d\varphi(w, \omega)}{dx}\right)} \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} + \cdots$$

Il reste encore à déterminer les constantes arbitraires, ainsi que les valeurs moyennes que nous avons supposées connues. D'après ce qui a déjà été dit au sujet de cette détermination, dans le cas d'équations

---

la différentiation de l'équation proposée. Les différences $\Delta^2 w$ et leurs dérivées, provenant des différentiations successives, sont considérées comme des fonctions de x données par (32); les opérations que l'on effectue alors introduisent au premier degré les dérivées cherchées et permettent de les calculer facilement.

différentielles, il convient tout d'abord de prendre les valeurs moyennes égales aux valeurs initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration; on obtient alors ces constantes au moyen d'un système de μ équations linéaires simultanées. S'il convient ensuite de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales avec les expressions données pour l'intégration, expressions qui seront complètement déterminées, on calculera la valeur moyenne β de y au moyen de celle de α de x, comme on le ferait pour des valeurs particulières quelconques; puis, substituant ces quantités α et β dans l'expression de la valeur fondamentale, on les considérera comme de nouvelles valeurs initiales, de telle sorte que les nouvelles constantes d'intégration seront déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ce système sera évidemment le même que le précédent, il n'en différera que par les valeurs numériques des variables; les formules de résolution ayant servi à la première détermination des constantes serviront aussi à la seconde, en y substituant les nouvelles valeurs initiales, qui sont les valeurs moyennes adoptées.

Ce que nous avons dit au sujet de l'intégration des équations différentielles a donc lieu aussi pour les équations contenant des différences; cela nous dispense d'entrer dans plus de détails : un exemple suffira pour achever d'élucider la question.

Cinquième exemple. — Les équations différentielles que nous avons traitées comme second exemple d'application de la méthode secondaire représentent la marche de certains phénomènes; en supposant que les conditions de ces phénomènes viennent à changer périodiquement, la loi restant la même, les équations différentielles dont nous parlons conduisent à former deux équations nouvelles qui contiennent des différences au lieu de différentielles. L'une de ces équations, qu'il suffit d'écrire, est

$$(\alpha) \qquad \Delta y - \mathrm{H} u y - r u = 0,$$

en faisant

$$(\alpha') \quad \begin{cases} \mathrm{H} = [tx + q(y - b) + cp] \\ \quad \times \left\{ \frac{u}{2}\left[tx + q(2y - b) + cp - \frac{pn}{tx + q(y - b) + cp} \right] - 1 \right\}. \end{cases}$$

b, c, n, p, q, t et r sont des constantes, b est la valeur que prend y pour $x = 0$, et u est la différence Δx. Telle est l'équation que nous nous proposons d'intégrer.

Formons l'équation réduite; pour cela, substituons à x et y, dans le coefficient H, leurs valeurs moyennes α et β, que nous prendrons égales respectivement aux valeurs initiales zéro et b; H devient

$$(\beta)' \qquad h = cp\left[\frac{u}{2}\left(bq + cp - \frac{n}{c}\right) - 1\right];$$

par suite, l'équation réduite est

$$(\beta) \qquad \Delta w - huw - ru = 0,$$

d'où l'on tire

$$w = \mathrm{M}(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h}.$$

La constante M, déterminée par les valeurs initiales, est

$$\mathrm{M} = b + \frac{r}{h},$$

ce qui donne, pour la valeur fondamentale,

$$(\gamma) \qquad w = \left(b + \frac{r}{h}\right)(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h};$$

on en déduit les quantités suivantes :

$$(\gamma)' \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \left(b + \frac{r}{h}\right)\frac{1}{u}(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu), \\ \Delta w &= u(bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}}, \\ \frac{d\Delta w}{dx} &= (bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu). \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons maintenant calculer les fonctions $\varphi(w)$, $\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$,

pour avoir l'expression de l'inconnue, d'après (64), c'est-à-dire

$$y = w - \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi w}{dx}\right)} \frac{dw}{dx} + \cdots.$$

Or, d'après (63) et (63'), en mettant H' pour H quand on substitue w à y,

$$(\delta) \quad \begin{cases} \varphi(w) = u(h - \mathrm{H}')w, \\ \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = u\left[\frac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\frac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)\right]w, \end{cases}$$

et, si l'on écrit la dérivée de w sous la forme

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{u}\left(w + \frac{r}{h}\right)\mathrm{L}(1 + hu),$$

on obtient pour l'inconnue, avec deux termes seulement,

$$(\varepsilon) \qquad y = w - \frac{h - \mathrm{H}'}{\frac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\frac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)} \frac{1}{u}\left(w + \frac{r}{h}\right)\mathrm{L}(1 + hu).$$

Aux quantités h, H et w qui entrent dans (ε) et qui sont données par (α'), (β') et (γ), il faut joindre la suivante :

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \frac{d\mathrm{H}}{dx} - \left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) \\ \quad = t\left\{\frac{u}{2}\left[(tx + q)(2y - b) + cp - \frac{pn}{tx + q(y - b) + cp}\right] - 1\right\} \\ \qquad + \frac{tu}{2}[(tx + q)(y - b) + cp]\left\{1 + \frac{pn}{[tx + q(y - b) + cp]^2}\right\}. \end{cases}$$

L'expression (ε) donne généralement les valeurs de l'inconnue, mais si, pour certaines valeurs de x, (ε) ne donnait pas une approximation suffisante, il conviendrait de recourir à divers moyens de transformation, tels que la méthode d'exhaustion ou le changement de valeurs moyennes, comme on le sait déjà.

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux [1] ;

PAR M. A. MANNHEIM.

Appelons (E) la surface du second ordre, o son centre et m le point pour lequel nous cherchons les éléments de courbure de cette surface. Nous supposons connus les plans principaux de (E) et son plan tangent en m. Proposons-nous d'abord de construire les axes de l'indicatrice de (E) pour le point m.

Appelons x, y, z les points de rencontre du plan tangent en m avec les trois axes de (E). Prenons x comme sommet d'un cône que nous circonscrivons à (E). Le plan de la courbe de contact de ce cône est parallèle au plan (oy, oz), et la trace de ce plan sur le plan tangent (xyz) est la parallèle à yz menée du point m. Cette parallèle et mx sont alors deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface (E) en m. Ceci peut se répéter en prenant les cônes circonscrits à (E) qui ont pour sommet y ou z.

Nous trouvons ainsi que les droites mx, my, mz et les parallèles aux côtés du triangle xyz, issues du point m, sont trois couples de dia-

[1] *Voir* sur le même sujet un article que M. Laguerre a publié dans ce Journal, 3e série, t. IV, p. 247.

mètres conjugués de l'indicatrice en m et forment alors un faisceau de six droites en involution [1].

L'ensemble de tous les systèmes de diamètres conjugués de l'indicatrice forme deux faisceaux en involution, et comme *dans deux faisceaux en involution il existe toujours un système de deux rayons conjugués rectangulaires, et qu'il n'en existe qu'un* [2], nous n'avons qu'à construire ce système de rayons rectangulaires pour avoir les axes de l'indicatrice en m.

Effectuons cette construction, qui n'est autre que la construction connue à l'aide de laquelle on détermine la direction des axes d'une conique dont on donne en direction deux systèmes de diamètres conjugués.

Sur yz, prenons le segment compris entre le point y et la parallèle à xz menée du point m. Sur ce segment comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle. Élevons une perpendiculaire à yz à partir du point où cette droite est rencontrée par xm. Cette perpendiculaire rencontre en deux points la circonférence que nous venons de décrire : les droites qui joignent ces deux points au point m comprennent entre elles des angles dont les bissectrices sont les axes de l'indicatrice en m.

Par les quatre points m, x, y, z, faisons passer une hyperbole équilatère. On sait que cette courbe passe par le point de rencontre des hauteurs du triangle xyz (ce point est le pied p de la perpendiculaire abaissée du centre o sur le plan tangent xyz). Coupons cette hyperbole par la droite à l'infini sur son plan. Joignons, par des droites, le point m aux points où cette droite rencontre l'hyperbole et les côtés du quadrilatère $mxyz$. Nous obtenons ainsi : les parallèles menées du point m aux asymptotes de la courbe, les droites mx, mz et les parallèles menées du point m aux côtés xy, yz. D'après le théorème de Desargues, ces droites forment un faisceau en involution. En rapprochant ce résultat de ce qui précède, nous voyons que :

---

(1) On sait du reste, indépendamment de ce que nous venons de dire, que : *si par un même point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, et des parallèles aux trois côtés, ces six droites forment trois groupes en involution.* (Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, 2e édition, p. 247.)

(2) *Loc. cit.*, p. 165.

Les axes de l'indicatrice en m sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par les points m, x, y, z (¹).

Dans cette hyperbole, nous avons deux triangles inscrits : ce sont xyz et le triangle formé par la droite de l'infini et les parallèles aux asymptotes menées de m. Les six côtés de ces triangles sont alors tangents à une conique. Cette conique est une parabole, puisqu'elle est tangente à la droite de l'infini. Le point m est un point de la directrice de cette parabole, ainsi que le point p. Nous avons alors ce théorème :

Les axes de l'indicatrice en m sont tangents à la parabole inscrite dans le triangle xyz et dont la directrice est la droite qui joint le point m au pied de la perpendiculaire abaissée du centre o sur le plan tangent (xyz) (²).

Appelons N la normale en m à (E), et N′, N″ les axes de l'indicatrice de (E) en m. Désignons par a, b, c les points de rencontre de N avec les plans principaux de (E); de même, pour N′, on a les points a', b', c', et pour N″ les points a'', b'', c''. Nous venons de démontrer que les droites N′, N″, $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ sont tangentes à une même parabole, et, comme nous pouvons appliquer le même théorème aux deux surfaces homofocales (H′), (H″) à (E) qui passe par m, nous voyons que dans chacun des plans (N, N′), (N, N″) nous avons aussi une parabole tangente aux plans principaux de (E); l'une est tangente à N et N′, l'autre est tangente à N et N″.

Considérons en particulier la parabole qui, sur le plan (N, N′), est tangente aux droites N, N′, aa', bb', cc'. Les tangentes à cette parabole déterminent sur deux tangentes fixes des segments proportionnels. Prenons comme tangentes fixes N et la tangente qui est infiniment voisine

---

(¹) Il résulte de là ce théorème connu : *Les axes de* (E), *le diamètre om et les parallèles menées du point o aux axes de l'indicatrice en m appartiennent à un même cône du second ordre.*

(²) On peut arriver à ce théorème sans passer par le théorème précédent en appliquant le corrélatif du théorème de Desargues.

de celle-ci. Puisque cette dernière droite est dans le plan d'une section principale de (E) et qu'elle est partagée, comme N, par N′ et les plans principaux, elle est, dans le plan (N, N′), la normale de (E) qui est infiniment voisine de N [1]. Le point de rencontre μ_1 de ces deux tangentes infiniment voisines, qui est le point où la parabole touche N, est alors le centre de courbure principal de la section faite dans (E) par le plan NN′ [2]. De même, on a sur N′ le point de contact μ'_1 de cette droite avec la parabole, qui est le centre de courbure principal de la section faite dans (H′) par le plan (N, N′). Ce que nous venons de trouver pour la parabole inscrite dans l'angle (N, N′) peut se répéter pour les deux autres. On voit donc que *ces trois paraboles touchent les droites* N, N′, N″ *aux six centres de courbures principaux des surfaces homofocales* (E), (H′), (H″).

La même propriété des tangentes à une parabole nous donne aussi $\frac{ab}{bc} = \frac{a'b'}{b'c'}$, et comme ce dernier rapport est égal à $\frac{a''b''}{b''c''}$, nous retrouvons ce théorème : *Les normales en m aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point sont partagées par les plans principaux en segments proportionnels.*

En appliquant toujours la propriété des tangentes à une parabole de déterminer sur deux tangentes fixes des segments proportionnels, on voit encore que :

Le centre de courbure μ_1, situé sur la normale N à (E), est placé, par rapport aux points a, b, c où cette normale rencontre les plans principaux,

---

(1) Je m'appuie ici sur cette propriété que les normales d'une surface du second ordre sont partagées par cette surface et par ses plans principaux en segments proportionnels, propriété qui permet aussi d'arriver directement à la parabole employée ici.

(2) On peut donc énoncer pour l'espace un théorème analogue à celui-ci : *La parabole tangente aux axes d'une ellipse ainsi qu'à la tangente et à la normale passant par un point donné touche cette normale au centre de courbure de l'ellipse,* théorème que j'ai donné en 1857, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. p. 328.

comme le point m est placé sur N', par rapport aux points a', b', c', où cette normale rencontre les plans principaux.

De même, *l'autre centre de courbure principal μ_2 situé sur N est placé par rapport aux points a, b, c comme m est placé sur N'' par rapport aux points a'', b'', c''.*

D'après cela, on peut construire μ_1 et μ_2 de bien des manières différentes. Voici une des constructions donnant ces points :

Par les points a, a', a'', on mène des plans respectivement perpendiculaires à N, N', N''; ces plans se coupent en un point α. De même, les points b, b', b'' conduisent de la même manière à un point β. Les projections de la droite $\alpha\beta$ sur les plans des sections principales (N, N'), (N, N'') *de* (E) *rencontrent* N *aux centres de courbure principaux μ_1, μ_2.*

Cette même droite $\alpha\beta$ conduit aussi aux centres de courbure principaux des surfaces (H'), (H''), ainsi qu'aux axes de courbure des lignes de courbure suivant lesquelles les trois surfaces homofocales (E), (H'), (H'') se coupent deux à deux.

Il est, en effet, assez facile, d'après ce qui précède, de démontrer la propriété suivante :

Trois surfaces homofocales du second ordre se coupent en un point m. Les normales à ces surfaces en ce point sont N, N', N''. *Ces normales rencontrent les plans principaux des surfaces homofocales, la première en a, b, c, la deuxième en a', b', c', et la troisième en a'', b'', c''. On élève respectivement de ces points des plans perpendiculaires à ces normales. Les plans issus des points a, a', a'' se coupent en α. On obtient de même un point β pour b, b', b'' et un troisième point γ pour c, c', c''. Ces trois points α, β, γ appartiennent à une même droite* Λ.

Les projections de Λ *sur les plans déterminés par les normales* N, N', N'', *prises deux à deux, rencontrent ces normales aux centres de courbure principaux des trois surfaces homofocales.*

Ces centres de courbure sont alors aussi les projections sur les normales N, N', N'' *des points où* Λ *perce les plans déterminés par ces nor-*

males, prises deux à deux. La droite qui joint les projections sur deux de ces normales du point où A perce le plan de ces droites est l'axe de courbure de la ligne d'intersection des surfaces homofocales normales en m à ce plan [1].

---

[1] Voir une Note que j'ai communiquée à la Société Royale de Londres dans la séance du 16 mars 1882.

Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables [1];

PAR M. APPELL.

1. La liaison intime qu'il y a entre les fonctions sphériques et la série hypergéométrique de Gauss est bien connue, et se trouve particulièrement mise en évidence dans le savant Ouvrage que M. Heine a publié sur ces fonctions.

Je me suis proposé de rattacher, de la même façon, les polynômes $\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$ de M. Hermite à des fonctions de deux variables analogues à la série de Gauss. J'ai été ainsi conduit à considérer quatre fonctions nouvelles qui, à divers titres, doivent être regardées comme des généralisations de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

L'étude de ces fonctions, leur définition par des équations différentielles linéaires simultanées, leur représentation par des intégrales définies forment, respectivement, l'objet des trois premiers Chapitres du présent Mémoire.

Le quatrième et dernier Chapitre est consacré à l'étude de fonctions satisfaisant à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre aux dérivées partielles, équation qui comprend, comme cas particulier, celle des fonctions Y_n de Laplace, et qui fournit ainsi une extension intéressante des principales propriétés de ces fonctions.

Qu'il me soit permis de remercier ici M. Heine, dont les conseils et

[1] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 29 mars 1880; je lui ai fait subir quelques modifications, afin d'y faire rentrer les résultats que j'ai obtenus depuis et qui ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie les 26 avril et 16 août 1880.

les encouragements bienveillants m'ont été d'un grand secours dans ce travail [1].

CHAPITRE I.

2. Soient k un entier positif, λ une quantité quelconque; je désigne le produit

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$$

par (λ, k), et je conviens que $(\lambda, 0)=1$. Les séries les plus simples qu'il convient de considérer comme généralisation de la série hypergéométrique de Gauss sont les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,\\
F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,\\
F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,\\
F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,
\end{aligned}\right.$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et n de zéro à l'infini. Voici comment on peut former ces fonctions (1). Soit

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}x^m$$

la série de Gauss. Formons le produit $F(\alpha,\beta,\gamma,x).F(\alpha',\beta',\gamma',y)$; le terme général de ce produit est

$$\frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n.$$

Remplaçons dans ce terme général certains produits tels que $(\alpha, m)(\alpha', n)$ par $(\alpha, m+n)$ de toutes les manières possibles; nous obtiendrons les

---

[1] Depuis que ces lignes sont écrites, la mort a enlevé M. Heine à la science; je me fais un devoir de rendre un dernier hommage à sa mémoire

termes généraux des séries (1). La combinaison $\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$ ne donne pas une série nouvelle; elle donne la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x+y)$.

En suivant la même règle, on pourra déduire, des séries hypergéométriques d'une variable de tous les ordres, des séries analogues de deux variables.

Les séries (1) peuvent s'écrire de la façon suivante, où elles sont ordonnées par rapport à x :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y)\, x^m,\\
F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma', y)\, x^m,\\
F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha', \beta', \gamma+m, y)\, x^m,\\
F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma', y)\, x^m.
\end{aligned}\right.$$

On obtient des formes semblables en ordonnant les quatre séries par rapport à y.

On voit immédiatement que les dérivées partielles des séries (1) par rapport à x ou y sont des séries de même espèce. Ainsi,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y), \quad \ldots.$$

On voit aussi que l'on pourra former un grand nombre de formules analogues à celles que donne Gauss par la série F, comme, par exemple,

$$\begin{aligned}
&F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad = -\frac{\beta x}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y)\\
&\qquad - \frac{\beta' y}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta, \beta'+1, \gamma+1, x, y),\\
&F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad = -\frac{\alpha x}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y).
\end{aligned}$$

5. Les séries (1) se réduisent à des séries hypergéométriques d'une variable quand on fait $x = 0$ ou $y = 0$. Mais il est d'autres cas où ces séries se réduisent à la série F. Prenons, par exemple, la série F_1 sous la forme (2) et faisons $y = 1$. On a, en supposant

$$\alpha + \beta' - \gamma < 0,$$

$$F(\alpha + m, \beta', \gamma + m, 1) = \frac{\Gamma(\gamma + m)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta' + m)}$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta')} \frac{(\gamma, m)}{(\gamma - \beta', m)}.$$

d'où l'on conclut

$$(3) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta')} F(\alpha, \beta, \gamma - \beta', x).$$

On obtient une formule analogue en faisant $x = 1$, et supposant $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

La série F_1 se réduit encore à la série F quand $y = x$. Pour le montrer, faisons $y = tx$; on a, en ordonnant par rapport aux puissances de x,

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, tx) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} F(\beta', -n, -\beta - n + 1, t) x^n;$$

la fonction F qui figure dans le coefficient de x^n est un polynôme. Si l'on fait $t = 1$, on a

$$F(\beta', -n, -\beta - n + 1, 1) = \frac{(\beta + \beta', n)}{(\beta, n)};$$

donc

$$(4) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, x) = F(\alpha, \beta + \beta', \gamma, x).$$

Voici encore un cas de réduction. Partons de la formule

$$(a) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x + y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m, y) x^m$$

On a, d'après une formule connue (voir *Gauss Werke*, III. Band,

p. 218, éq. 91),

$$\begin{aligned} &F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, y) \\ &\quad = (1-y)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \gamma-\beta, \gamma+m, -\frac{y}{1-y}\right); \end{aligned}$$

en substituant et se reportant aux formules (2), on voit que

$$(5) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x+y) = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{1-y}, \frac{-y}{1-y}\right),$$

formule qui montre que la série F_1 se ramène à F toutes les fois que $\beta+\beta'=\gamma$.

En partant de la formule (*a*), et appliquant la relation d'Euler

$$F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, y) = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta-m} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+m, y),$$

on obtient la relation

$$(5') \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x+y) = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{1-y}, y\right),$$

qui montre que la série F_3 se ramène à F toutes les fois que

$$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma.$$

Enfin on peut montrer que la série F_1 se ramène *toujours* à F_3. Pour cela, prenons la forme (2) de F_1 et appliquons la formule déjà employée précédemment,

$$F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y) = (1-y)^{-\beta'} F\left(\beta', \gamma-\alpha, \gamma+m, -\frac{y}{1-y}\right),$$

nous avons

$$(6) \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \beta', \beta, \gamma-\alpha, \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right),$$

et, de même,

$$(6') \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-x)^{-\beta} F_3\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma-\alpha, \gamma, y, \frac{-x}{1-x}\right).$$

En appliquant aux fonctions (2) ou à la fonction (*a*) les autres formules relatives à la série F qui se trouvent dans le troisième Volume

des *Œuvres de Gauss* ou dans le Mémoire de M. Kummer (*Journal de Crelle*, t. 15), on obtiendra d'autres relations analogues aux précédentes, qu'il est inutile d'exposer ici.

4. Voici d'abord quelques remarques sur la convergence des quatre séries.

F_1. — Le terme général de la série F_1 est

$$A_{m,n}\, x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

et l'on a

$$\lim (m+n)^{\gamma-\alpha} m^{1-\beta} n^{1-\beta'} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')} \quad (m = n = \infty).$$

Soient

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 i, \quad \beta' = \beta'_1 + \beta'_2 i, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i,$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$; soit N un nombre plus grand que le module de $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}$. Désignons, en outre, par a et b les modules respectifs de x et y. On aura, pour toutes les valeurs de m et n plus grandes que certains nombres déterminés m_1 et n_1,

$$\text{mod.}\, A_{m,n}\, x^m y^n < \frac{N}{(m+n)^{\gamma_1-\alpha_1} m^{1-\beta_1} n^{1-\beta'_1}} a^m b^n,$$

d'où l'on conclut immédiatement que la série F_1 est convergente tant que a et b sont moindres que l'unité. On montre de même que, si a ou b est plus grand que l'unité, la série F_1 est divergente.

F_2. — Le terme général de la série F_2 est

$$A_{m,n}\, x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

et l'on a

$$\lim (m+n)^{1-\alpha} m^{\gamma-\beta} n^{\gamma'-\beta'} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

Soient, comme précédemment, α_1, β_1, β'_1, γ_1, γ'_1 les parties réelles

de α, β, β', γ, γ', et N un nombre plus grand que le module de

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

On a, à partir de valeurs déterminées suffisamment grandes de m et n,

$$\text{mod. } A_{m,n} x^m y^n < N \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(m+n)^{\alpha_1-1} m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $\beta_1-\gamma_1$, $\beta'_1-\gamma'_1$; on a

$$m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} < m^\varepsilon n^\varepsilon < \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^\varepsilon};$$

la série des modules a donc ses termes respectivement moindres que ceux de la série

$$\frac{N}{4^\varepsilon}\sum_0^\infty \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(m+n)^{2\varepsilon+\alpha_1-1} a^m b^n;$$

or cette dernière série peut s'écrire

$$\frac{N}{4^\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{2\varepsilon+\alpha_1-1}(a+b)^\mu,$$

et elle est convergente tant que

$$a+b<1.$$

Donc la série F_2 est convergente tant que

$$\text{mod. } x + \text{mod. } y < 1.$$

On démontre, par une méthode analogue à la précédente, qu'elle est divergente si

$$\text{mod. } x + \text{mod. } y > 1.$$

F_3. — Le terme général de la série F_3 est

$$A_{m,n}x^m y^n = \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

On a

$$\lim m^{2-\alpha-\beta} n^{2'-\alpha'-\beta'} (m+n)^{\gamma-1} \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')};$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$\text{mod. } A_{m,n} x^m y^n < N m^{\alpha_1-\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2} (m+n)^{1-\gamma_1} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} a^m b^n,$$

et, comme

$$\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} < 1,$$

$$\text{mod. } A_{m,n} x^m y^n < N.m^{\alpha_1+\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2} (m+n)^{1-\gamma_1} a^m b^n;$$

la série F_3 est donc convergente lorsque a et b sont moindres que l'unité.

Elle est divergente si a ou b est plus grand que l'unité, ainsi que l'on s'en assure facilement.

F_4. — Prenons enfin la série F_4 dont le terme général est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n;$$

on a, dans ce cas,

$$\lim (m+n)^{2-\alpha-\beta} m^{\gamma-1} n^{\gamma'-1} \left(\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n}\right)^2 A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Soit encore ici N un nombre plus grand que le module de cette limite; à partir de certaines valeurs déterminées de m et n, on aura

$$\text{mod } A_{m,n} x^m y^n < N.\ (m+n)^{\alpha_1-\beta_1-2} m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $1-\gamma_1$ et $1-\gamma'_1$; alors

$$m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} > m^{\varepsilon} n^{\varepsilon} \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^{\varepsilon}},$$

d'où

$$\operatorname{mod} A_{m,n}\, x^m y^n < N \cdot \frac{1}{4^\varepsilon} \cdot (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2\varepsilon-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} \right)^2 a^m b^n.$$

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{m,n} (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2\varepsilon-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} \right)^2 a^m b^n;$$

dans cette dernière série, groupons les termes pour lesquels $m+n=\mu$: elle devient

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2\varepsilon-2} \left[a^\mu + \left(\frac{\mu}{1}\right)^2 a^{\mu-1} b + \left(\frac{\mu.\mu-1}{1.2}\right)^2 a^{\mu-2} b^2 + \ldots + b^\mu \right];$$

on voit immédiatement que le polynôme entre parenthèses est moindre que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu} = \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^\mu \right]^2.$$

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2\varepsilon-2} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu},$$

laquelle est convergente tant que $\sqrt{a}+\sqrt{b}<1$.

Donc, la série F_1 est convergente si

$$\operatorname{mod}\sqrt{x} + \operatorname{mod}\sqrt{y} < 1.$$

CHAPITRE II.

Définition des quatre fonctions par des équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles.

5. De même que la fonction hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle linéaire qui permet de définir cette fonction

pour toutes les valeurs de la variable indépendante; de même, nos quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 satisfont à des équations différentielles simultanées permettant de les définir pour tous les groupes de valeurs des variables indépendantes x et y.

Ces équations sont les suivantes, ainsi qu'on le vérifie facilement :

$$F_1 \begin{cases} (x-x^2)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} (x-x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_3 \begin{cases} (x-x^2)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_4 \begin{cases} (x-x^2)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations les lettres p, q, r, s, t désignent, comme il est d'usage, les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Indiquons d'abord quelques théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires simultanées de la forme précédente.

6. Considérons, d'une manière générale, les équations simultanées

$$(7) \qquad r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \quad t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

les a et les b étant des fonctions de x et y. Supposons que la quantité $1 - a_1 b_4$ ne soit pas nulle identiquement et que la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x}$ soit remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. Dans ces conditions, on peut démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit x_0, y_0 un système de valeurs des variables x et y*

tel que, pour des valeurs de ces variables voisines de x_0 et y_0, les coefficients des équations (7) soient holomorphes, et que la quantité $1 - a_1 b_1$ ne soit pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$; on pourra satisfaire aux équations (7) par une fonction de x et y holomorphe dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Ce théorème se déduit facilement d'un théorème sur les équations aux différentielles totales, démontré par M. Bouquet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265). Pour le montrer, différentions la première des équations (7) par rapport à y, la deuxième par rapport à x, et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial y}$. Nous obtenons ainsi deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on pourra tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est précisément $1 - a_1 b_1$ que l'on suppose différent de zéro. On a, de cette façon, pour $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, des expressions linéaires en r, s, t, p, q, z que l'on peut ramener à ne contenir que s, p, q, z à l'aide des équations (7)

$$(8)\qquad \frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z.$$

Cela posé, considérons le système d'équations aux différentielles totales

$$(9)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z)\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + (b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z)\,dy, \\ ds = (\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)\,dx + (\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)\,dy. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système se réduisent à une seule

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)}{\partial x}.$$

que nous supposons remplie identiquement. Les coefficients de dx et dy sont, d'après les hypothèses faites, holomorphes dans le voisinage des valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, quelles que soient les valeurs de z, p, q, s: on peut donc appliquer le théorème de M. Bouquet, et l'on a le théorème I qu'il fallait démontrer.

Le théorème précédent s'applique aux équations F_2, F_3, F_4, ainsi que ceux qui vont suivre. Il y a exception pour les équations F_1 pour lesquelles la quantité $1 - a_1 b_1$ est nulle identiquement, circonstance que nous examinerons plus loin.

Dans ce qui suit, j'appelle *couple de valeurs singulières* un couple de valeurs $x = \xi$, $y = \eta$ tel que pour ces valeurs $1 - a_1 b_1$ s'annule, ou que les coefficients a et b ne soient pas, dans le voisinage de ces valeurs, développables en séries de la forme

$$\sum_0^\infty A_{m,n}(x - \xi)^m (y - \eta)^n.$$

7. Il est, d'après ce qui précède, aisé de définir ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant aux équations (7). Donnons à y une valeur constante y_0, qui ne soit pas une valeur singulière pour les coefficients a et b et qui n'annule pas la quantité $1 - a_1 b_1$. Soit T une portion du plan des x limitée par un contour simple, dans laquelle les coefficients a et b soient des fonctions holomorphes de x et la quantité $1 - a_1 b_1$ soit différente de zéro, à l'exception de points *singuliers* isolés les uns des autres. Soient x_0 et x deux points non singuliers de la surface T; joignons-les par une courbe quelconque $x_0 x$ située entièrement dans la surface T et ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement les valeurs de z et des dérivées p, q, s au point x_0. Au moyen de la continuité, l'on pourra en déduire les valeurs de la fonction z tout le long de la courbe $x_0 x$.

Inversement, on pourra laisser x constant et faire varier y. De sorte que l'on pourra toujours passer de la valeur de la fonction pour $x = x_0$, $y = y_0$ à la valeur de la fonction pour $x = x_1$, $y = y_1$, pourvu que les couples de valeurs (x_0, y_0), (x_1, y_1) ne soient pas des couples de valeurs singulières.

8. Théorème II. — *Si l'on a cinq fonctions* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 *satisfai-*

sant aux équations (7), il y a entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 = 0.$$

Pour le démontrer, appelons p_i, q_i, s_i les dérivées de z_i, et faisons

$$\begin{aligned} Z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_5 z_5, \\ P &= C_1 p_1 + C_2 p_2 + \ldots + C_5 p_5, \\ Q &= C_1 q_1 + C_2 q_2 + \ldots + C_5 q_5, \\ S &= C_1 s_1 + C_2 s_2 + \ldots + C_5 s_5; \end{aligned}$$

les multiplicateurs C étant, pour le moment, des fonctions quelconques de x et y. Puisque les cinq fonctions satisfont aux équations (9), on a, comme on le vérifie facilement,

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} dZ &= P\,dx + Q\,dy + z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5, \\ dP &= (a_1 S + a_2 P + a_3 Q + a_4 Z)\,dx + S\,dy + p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2 \\ &\quad + \ldots + p_5\,dC_5, \\ dQ &= S\,dx + (b_1 S + b_2 P + b_3 Q + b_4 Z)\,dy + q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2 \\ &\quad + \ldots + q_5\,dC_5, \\ dS &= (\alpha_1 S + \alpha_2 P + \alpha_3 Q + \alpha_4 Z)\,dx + (\beta_1 S + \beta_2 P + \beta_3 Q + \beta_4 Z)\,dy \\ &\quad + s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5. \end{aligned}\right.$$

Or, on peut toujours déterminer les fonctions C de façon que les quatre fonctions Z, P, Q, S soient nulles identiquement; et alors les équations (9') donnent

$$\begin{aligned} z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5 &= 0, \\ p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2 + \ldots + p_5\,dC_5 &= 0, \\ q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2 + \ldots + q_5\,dC_5 &= 0, \\ s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5 &= 0, \end{aligned}$$

qui, comparées aux équations $Z = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $S = 0$ montrent que

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \cdots = \frac{dC_5}{C_5}.$$

D'où l'on conclut que les rapports des multiplicateurs C à l'un d'entre eux sont constants, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 satisfaisant aux équations (7), et telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces quatre fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

On voit en effet que l'on peut, parce que D est nul, supposer dans le raisonnement précédent $C_5 = 0$.

9. Théorème III. — *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations (7), le déterminant D satisfait à la relation*

$$d \log D = (a_2 + \alpha_1)\, dx + (b_3 + \beta_1)\, dy, \tag{10}$$

$$D = A e^{\int_{x_0}^{x} (a_2 + \alpha_1)\, dx + \int_{y_0}^{y} (b_3 + \beta_1)_{x_0}\, dy}. \tag{11}$$

En effet, on a

$$dD = \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 & dz_3 & dz_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ dp_i \\ q_i \\ s_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ dq_i \\ s_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ q_i \\ ds_i \end{vmatrix}, \tag{12}$$

où l'on n'a écrit qu'une colonne dans chacun des trois derniers déterminants; or, d'après les équations (9), le premier déterminant est nul; le deuxième est égal à $a_2 D dx$, le troisième à $b_3 D dy$, le dernier à $\alpha_1 D dx + \beta_1 D dy$; donc

$$dD = D[(a_2 + \alpha_1) dx + (b_3 + \beta_1) dy] ;$$

d'où résulte immédiatement l'équation (10).

10. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations (7), et telles que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, le déterminant D ne soit pas nul; d'après le théorème III, ce déterminant ne sera nul que pour les couples de valeurs singulières. Nous donnerons à l'ensemble de ces quatre fonctions le nom de *système fondamental d'intégrales*. On voit immédiatement, d'après le théorème II, que *toute solution des équations différentielles peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental quelconque*.

On peut encore démontrer cette proposition en remarquant que, si l'on pose

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4,$$

on pourra déterminer les coefficients constants C_i de façon que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, z, p, q, s prennent des valeurs données d'avance. On aura, pour cela, à résoudre, quatre équations du premier degré dont le déterminant D est différent de zéro, puisque z_1, z_2, z_3, z_4 forment un système fondamental d'intégrales.

11. Supposons, dans les équations (7), que, lorsqu'on laisse une des variables constantes, $y = \eta$ par exemple, les coefficients soient des fonctions uniformes de x dans une région T du plan des x et n'y présentent qu'un nombre fini de points dont les affixes forment avec η des couples de valeurs singulières. D'après le théorème I, une intégrale quelconque z des équations différentielles sera une fonction de x holomorphe en tous les points situés dans la région T, excepté aux points singuliers en question.

Soit ξ un de ces points singuliers, et soient z_1, z_2, z_3, z_4 les éléments

d'un système fondamental d'intégrales. Supposons que, y restant égal à η, la variable x fasse le tour du point ξ en restant sur la surface T, et appelons (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) les nouvelles valeurs que prennent les intégrales quand le tour est accompli. Ces nouvelles fonctions sont encore des solutions des équations, et, d'après ce qui précède, elles forment encore un système fondamental. On a donc

$$(13)\qquad (z_i) = \lambda_{i1} z_1 + \lambda_{i2} z_2 + \lambda_{i3} z_3 + \lambda_{i4} z_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant des constantes λ_{ik} étant différent de zéro. Les conséquences de ces relations sont analogues à celles qui se présentent, dans la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante. (*Voir*, par exemple, les *Annales de l'École Normale*, t. IV, Mémoire de M. Tannery, p. 134 et suiv.).

12. Voici comment on peut déterminer les intégrales générales des équations F_2, F_3, F_4, qui rentrent dans la catégorie des équations que nous venons d'étudier.

Dans les équations F_2, faisons

$$(14)\qquad z = x^{\lambda} y^{\mu} z',$$

et cherchons à déterminer les exposants λ et μ de telle façon que les équations en z' aient la même forme que les équations F_2. On trouve pour λ et μ trois groupes de valeurs, et l'on obtient pour l'intégrale générale des équations F_2 l'expression

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} z = {} & A F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_2(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \beta', 2 - \gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_2(\alpha + 1 - \gamma', \beta, \beta' + 1 - \gamma', \gamma, 2 - \gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \\ & \times F_2(\alpha + 2 - \gamma - \gamma', \beta + 1 - \gamma, \beta' + 1 - \gamma', 2 - \gamma, 2 - \gamma', x, y), \end{aligned}\right.$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Cette intégrale, dans laquelle on considère y comme une constante, est, dans le voisinage du point singulier $x = 0$, de la forme trouvée pour le cas général

13. Considérons, par exemple, les polynômes que M. Hermite a in-

diqués comme généralisation des polynômes de Legendre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LX, p. 370, 432, 461, 512, et *Journal de Crelle*, t. 64) et qui ont été étudiés par Didon (*Annales de l'École Normale*, t. V, année 1868). Si l'on fait

$$U = \frac{d^{m-n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

ce polynôme satisfait aux équations simultanées

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (n-2)x\frac{\partial U}{\partial x}\\ - (m+1)y\frac{\partial U}{\partial y} + (m+n)(m+1)U = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (m-2)y\frac{\partial U}{\partial y}\\ - (n+1)x\frac{\partial U}{\partial x} + (m+n)(n+1)U = 0.\end{aligned}$$

Si, dans ces équations, on fait $x = \sqrt{\xi}$, $y = \sqrt{\eta}$, elles deviennent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}(\xi-\xi^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \xi\eta\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)\xi\right]\frac{\partial U}{\partial \xi}\\ - \frac{m+1}{2}\eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{4}(m+n)(m+1)U = 0,\\ (\eta-\eta^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \xi\eta\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - m + 1\right)\eta\right]\frac{\partial U}{\partial \eta}\\ - \frac{n-1}{2}\xi\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{4}(m+n)(n+1)U = 0,\end{aligned}\right.$$

équations de la forme F_2, dont l'intégrale générale est

$$\begin{aligned}U = AF_2\left(-\frac{m+n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \xi, \eta\right)\\ + B\sqrt{\xi}F_2\left(\frac{1-m-n}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \xi, \eta\right)\\ + C\sqrt{\eta}F_2\left(\frac{1-m-n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi, \eta\right)\\ + D\sqrt{\xi\eta}F_2\left(1-\frac{m+n}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{n}{2}+1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \xi, \eta\right).\end{aligned}$$

Cette intégrale générale a été déterminée par Didon sous forme d'in-

tégrales définies. Il est à remarquer, comme le remarque Didon, que deux des quatre intégrales particulières sont toujours des polynômes, car, si $(m+n)$ est pair, les coefficients de A et $D\sqrt{\xi\eta}$ sont des polynômes, et si $(m+n)$ est impair, les coefficients de $B\sqrt{\xi}$ et $C\sqrt{\eta}$ sont des polynômes.

On peut de même ramener à la fonction F_2 les polynômes $V_{m,n}$ associés aux précédents, satisfaisant à deux équations différentielles linéaires analogues aux précédentes. (Mémoire de Didon, déjà cité, p. 243, éq. 16 et 17.) Plus généralement, la fonction $\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n}$ peut s'exprimer à l'aide de F_2, quelle que soit la constante h.

14. Les équations F_3 peuvent, par un changement de variables, se ramener à la forme F_2. Pour le montrer faisons, dans les équations F_3,

$$x=\frac{1}{\xi},\quad y=\frac{1}{\eta};$$

ces équations deviennent

$$\xi^2(\xi-1)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\xi^2\eta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi[(2-\gamma)\xi+\alpha+\beta-1]\frac{\partial z}{\partial\xi}-\alpha\beta z=0,$$

$$\eta^2(\eta-1)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\eta^2\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\eta[(2-\gamma)\eta+\alpha'+\beta'-1]\frac{\partial z}{\partial\eta}-\alpha'\beta' z=0.$$

Dans ces équations, faisons $z=\xi^\lambda\eta^\mu z'$; on peut déterminer λ et μ de façon qu'après la substitution le premier membre de la première équation soit divisible par $\xi^{\lambda+1}\eta^\mu$, le premier membre de la deuxième par $\xi^\lambda\eta^{\mu+1}$; il suffit, pour cela, de prendre $\lambda=\alpha$, $\mu=\alpha'$; alors les équations en z' sont

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&(\xi-\xi^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi^2}-\xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi\,\partial\eta}\\&\qquad+[\alpha-\beta+1-\xi(2\alpha+\alpha'+2-\gamma)]\frac{\partial z'}{\partial\xi}\\&\qquad\qquad-\alpha\eta\frac{\partial z'}{\partial\eta}-\alpha(\alpha+\alpha'-\gamma+1)z'=0,\\&(\eta-\eta^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial\eta^2}-\xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi\,\partial\eta}\\&\qquad+[\alpha'-\beta'+1-\eta(2\alpha'+\alpha+2-\gamma)]\frac{\partial z'}{\partial\eta}\\&\qquad\qquad-\alpha'\xi\frac{\partial z'}{\partial\xi}-\alpha'(\alpha+\alpha'-\gamma+1)z'=0,\end{aligned}\right.$$

équations de la forme F_2. Comme on a l'intégrale générale des équations F_2, il en résulte l'intégrale générale des équations F_3. Cette intégrale est

$$\begin{aligned} z = {} & A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha+\alpha'-\gamma+1, \alpha, \alpha', \alpha-\beta+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ & + B x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta+\alpha'-\gamma+1, \beta, \alpha', \beta-\alpha+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ & + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha+\beta'-\gamma+1, \alpha, \beta', \alpha-\beta+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ & + D x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta+\beta'-\gamma+1, \beta, \beta', \beta-\alpha+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \end{aligned}$$

15. En faisant, dans les équations F_3, la substitution $z = x^\lambda y^\mu z'$, et déterminant λ et μ de façon à avoir des équations de même forme, on a, pour l'intégrale générale de ces équations,

$$\begin{aligned} z = {} & A F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_4(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+1-\gamma', \beta+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y). \end{aligned}$$

16. *Équations* F_1. — J'arrive maintenant aux équations F_1 auxquelles, comme je l'ai remarqué, les théorèmes précédents (§ 6-12) ne s'appliquent plus, car $1 - a_1 b_1$ est nul pour ces équations.

Différentions la première des équations F_1 par rapport à y, la deuxième par rapport à x, et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ respectivement par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$; nous aurons deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$; le déterminant de ces équations est *nul*. On peut donc éliminer $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, et l'on obtient une équation qui, simplifiée à l'aide des équations F_1, se réduit à

$$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

La fonction F_1 vérifie donc aussi cette dernière équation, qui est

une conséquence des deux autres; et, par suite, elle vérifie les trois équations

$$(18)\quad \begin{cases} (x-y)(x-x^2)r \\ \quad +[\gamma(x-y)-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+1)xy+\beta'y]p \\ \qquad\qquad -\beta\gamma(1-y)q-\alpha\beta(x-y)z=0, \\ (y-x)(y-y^2)t \\ \quad +[\gamma(y-x)-(\alpha+\beta'+1)y^2+(\alpha-\beta+\beta'+1)xy+\beta x]q \\ \qquad\qquad -\beta'x(1-x)p-\alpha\beta'(y-x)z=0, \\ (x-y)s-\beta'p+\beta q=0. \end{cases}$$

On voit, par un calcul facile, que, si l'on calcule à l'aide de ces équations $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial s}{\partial x}$, les deux expressions trouvées sont identiques en x, y, z, p, q; de même pour $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$. On a donc un système de trois équations linéaires simultanées de la forme

$$(19)\quad \begin{cases} r=a_1p+a_2q+a_3z, \\ t=b_1p+b_2q+b_3z, \\ s=c_1p+c_2q+c_3z, \end{cases}$$

les a, b, c étant des fonctions de x et y, et les conditions $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}$ étant remplies identiquement. En considérant le système des équations aux différentielles totales

$$(19)'\quad \begin{cases} dz=p\,dx+q\,dy, \\ dp=(a_1p+a_2q+a_3z)\,dx+(c_1p+c_2q+c_3z)\,dy, \\ dq=(c_1p+c_2q+c_3z)\,dx+(b_1p+b_2q+b_3z)\,dy, \end{cases}$$

on pourra appliquer à ce système le théorème de M. Bouquet déjà cité, et l'on verra que :

Théorème a. — *Si pour $x=x_0$, $y=y_0$ les coefficients a, b, c sont holomorphes, on pourra satisfaire aux équations (19) par une fonction z de x et y holomorphe pour $x=x_0$, $y=y_0$; les valeurs de cette fonction et des dérivées p et q étant arbitraires pour $x=x_0$, $y=y_0$.*

On démontre, comme nous l'avons fait précédemment, que :

THÉORÈME *b*. — *Si l'on a quatre fonctions* z_1, z_2, z_3, z_4 *vérifiant les équations* (19), *il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

Corollaire. — Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations (19) et telles que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants.

THÉORÈME *c*. — *Si l'on a trois fonctions* z_1, z_2, z_3 *vérifiant les équations* (19), *le déterminant* Δ *satisfait à la relation*

$$d\log\Delta = (a_1 + c_2)\,dx + (c_1 + b_2)\,dy. \tag{20}$$

Les conclusions qu'on tire de ces théorèmes relativement à l'intégrale générale des équations (19) sont analogues à celles du § **11**.

17. Dans le cas particulier des équations (18), on a

$$a_1 + c_2 = -\frac{\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y}{(x-y)x(1-x)} - \frac{\beta}{x-y}$$
$$= \frac{\beta'-\gamma}{x} + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-x} - \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

et

$$c_1 + b_2 = \frac{\beta-\gamma}{y} + \frac{\alpha+\beta'+1-\gamma}{1-y} + \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

d'où, d'après (20),

$$\Delta = A x^{\beta'-\gamma} y^{\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1} (x-y)^{-(\beta+\beta')}.$$

On peut encore remarquer, en changeant dans les équations (18)

x en $1-x$ et y en $1-y$, qu'elles admettent la solution

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma, 1-x, 1-y).$$

18. Pour étudier les intégrales des équations différentielles simultanées des formes (7) et (19), on pourrait encore employer la méthode suivante.

Nous avons ramené les équations (7) à la forme (9). Dans ces dernières équations, faisons $y = \text{const.}$, $dy = 0$; ces équations deviennent

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$\frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{ds}{dx} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z;$$

l'élimination des fonctions s, p, q conduit à une équation différentielle du quatrième ordre à laquelle satisfait z considéré comme fonction de la seule variable x, et l'on pourra appliquer à cette équation les méthodes de M. Fuchs. De même, la fonction z considérée comme fonction de y seul, $x = \text{const.}$ satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre.

Par exemple, la fonction F_3 considérée comme fonction de x seul satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&x^2(xy-x-y)(1-x)\frac{d^4 z}{dx^4} \\
&\quad + x\{(\gamma+2-(\alpha+\beta+5)x](xy-x-y) \\
&\qquad - [\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x](1-x)\}\frac{d^3 z}{dx^3} \\
&\quad + \{(\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x] \\
&\qquad \times [(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x \\
&\qquad - x(xy-x-y)(2\alpha\beta+3\alpha+3\beta+5)-(\alpha+1)(\beta+1)x-\alpha'\beta' y\}\frac{d^2 z}{dx^2} \\
&\quad - (\alpha+1)(\beta+1) \\
&\quad \times \{(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x \\
&\qquad + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x](1-y)\}\frac{dz}{dx} \\
&\qquad + \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)(1-y)z = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation montre que z est une fonction holomorphe de x dans tout le plan, excepté dans le voisinage des points

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{y}{y-1}, \quad x = \infty.$$

Au point singulier $x = 0$, par exemple, l'équation fondamentale déterminante est

$$\begin{aligned} r(r-1)(r-2)(r-3) &+ r(r-1)(r-2)(2\gamma - \alpha' - \beta' + 3) \\ &- r(r-1)[\gamma + 1](\alpha' + \beta' - \gamma - 1) - \alpha'\beta' = 0, \end{aligned}$$

dont les racines sont

$$0, \quad 1, \quad \alpha' - \gamma + 1, \quad \beta' - \gamma + 1.$$

Si l'on prend de même les équations de la forme (19), on les ramène à la forme (19'); puis, supposant $y = \text{const.}$, $dy = 0$, on a trois équations simultanées

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \quad \frac{dq}{dx} = c_1 p + c_2 q + c_3 z,$$

entre lesquelles on peut éliminer p et q. On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du troisième ordre, à laquelle satisfait z considéré comme fonction de x seul.

Ainsi, par exemple, la fonction F_1 considérée comme une fonction de x seul satisfait à une équation différentielle linéaire du troisième ordre, qui a été formée par M. Picard (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 1267). M. Picard a montré en même temps que F_1 considéré comme fonction de x seul ou de y seul est une des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur étudiées par M. Pochhammer (*Journal de Crelle*, t. 71).

CHAPITRE III.

Expression des fonctions F *à l'aide d'intégrales définies; relations entre ces fonctions.*

19. On vérifie facilement les formules suivantes, en développant les intégrales suivant les puissances croissantes de x et y,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int u^{\alpha-1}v^{\alpha'-1}(1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1}\,du\,dv \\ &\quad = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{\Gamma(\gamma)}\,F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y), \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\,du\,dv \\ &\quad = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)}\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y), \end{aligned}\right.$$

les deux intégrales précédentes étant étendues aux valeurs réelles de u et v telles que

$$u \geq 0,\quad v \geq 0,\quad 1-u-v > 0;$$

puis

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1 u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\,du\,dv \\ &\quad = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}\,F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y). \end{aligned}\right.$$

La fonction F_1 peut aussi s'exprimer par une intégrale simple, comme l'a montré M. Picard dans la Note citée plus haut; on a, en effet,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du \\ &\quad = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y). \end{aligned}\right.$$

Les expressions précédentes des fonctions F_1, F_2, F_3 donnent, par des changements de variables sous les signes $\int$, différentes formules importantes.

Ainsi, en changeant dans la formule (24) u en $1-u$, on obtient immédiatement la relation

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

De même, en changeant dans (23) successivement u en $1-u$, puis v en $1-v$, on a les relations

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right)\\ &\quad=(1-y)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right)\\ &\quad=(1-x-y)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

Enfin, si dans la formule (22) on fait

$$u=1-u'-v',\quad v=v',\quad 1-u-v=u',$$

on trouve, après quelques réductions faciles, la formule

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma,\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right),\end{aligned}\right.$$

d'où, par raison de symétrie,

$$(27')\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-y)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\beta,\gamma-\beta-\beta',\gamma,\frac{y-x}{y-1},\frac{y}{y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

20. L'expression de F_3 par une intégrale définie permet de démontrer pour cette fonction une proposition intéressante par son analogie avec la question du développement d'une fonction d'une variable en fraction continue.

Supposons, en effet, dans cette formule

$$\beta = \beta' = 1;$$

remplaçons x et y par $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, puis posons, pour simplifier,

$$f(u, v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1} (1 - u - v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1};$$

nous avons

$$\int\int \frac{f(u, v)}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)\left(1 - \frac{v}{y}\right)} du\, dv$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma - \alpha - \alpha')}{\Gamma(\gamma)} F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

L'intégrale double du premier membre de cette relation est de la forme de celles qui ont été étudiées par Didon (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 265). Nous allons appliquer à cette intégrale la méthode indiquée par Didon, avec quelques modifications faciles à apercevoir.

Proposons-nous, par analogie avec la question qui se présente dans le développement d'une fonction d'une variable en fraction continue, de former un polynôme $Q(x, y)$ de degré $m + n$, tel que le produit

$$28 \qquad Q(x, y) F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x et y, ne contienne aucun terme en $\frac{1}{x^h y^k}$, où h et k sont des entiers positifs ou nuls vérifiant les relations

$$29 \qquad h + k < m + n, \quad \text{ou bien} \quad h + k = m + n,\ h < m,\ k < n.$$

Ce polynôme $Q(x, y)$ est déterminé, à un facteur constant près, par ces conditions; je vais montrer que l'on a

$$30 \qquad Q(x, y) = \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial^{m+n}[x^m y^n (1 - x - y)^{m+n} f(x, y)]}{\partial x^m \partial y^n};$$

ce qui constitue une proposition analogue à celle démontrée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. LVI, p. 149) au sujet de la fonction

$$F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right).$$

Pour démontrer que le polynôme $Q(x, y)$ défini par la formule (30) est bien celui que nous cherchons, remarquons d'abord que l'intégration par parties donne immédiatement, en supposant $\alpha, \alpha', \gamma - \alpha - \alpha'$ positifs,

$$\int\int f(u, v) Q(u, v) u^h v^k \, du \, dv = 0, \tag{31}$$

les entiers positifs ou nuls h et k vérifiant les conditions (29). Puis considérons l'identité suivante indiquée par Didon (*loc. cit.*, p. 267) :

$$\begin{aligned} Q(x, y) \int\int \frac{f(u, v)\, du\, dv}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)\left(1 - \frac{v}{y}\right)} &= \int\int \frac{Q(x, v) - Q(u, v)}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)\left(1 - \frac{v}{y}\right)} f(u, v)\, du\, dv + \int\int \frac{Q(u, y) - Q(u, v)}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)\left(1 - \frac{v}{y}\right)} f(u, v)\, du\, dv \\ &+ \int\int \frac{Q(u, v) f(u, v)}{\left(1 - \frac{u}{x}\right)\left(1 - \frac{v}{y}\right)} du\, dv + xy \int\int \Phi(x, y, u, v) f(u, v)\, du\, dv, \end{aligned}$$

où $\Phi(x, y, u, v)$ désigne une fonction entière de x, y, u, v.

Dans le développement du second membre de cette identité suivant les puissances décroissantes de x et y, les termes de la forme $\frac{A_{hk}}{x^h y^k}$, h et k étant des entiers positifs ou nuls, proviennent de la troisième intégrale seulement; en effet, la première est une fonction entière de x contenant x en facteur, la deuxième une fonction entière de y contenant y en facteur, et la quatrième une fonction entière de x et y contenant xy en facteur. Mais, dans le développement de la troisième intégrale, le coefficient A_{hk} de $\frac{1}{x^h y^k}$ est

$$A_{hk} = \int\int f(u, v) Q(u, v) u^h v^k \, du\, dv.$$

coefficient qui, d'après (31), est nul dès que h et k vérifient les conditions (29). La proposition est donc démontrée, et quoique la démonstration emploie des intégrales multiples qui peuvent cesser d'avoir un sens pour certaines valeurs de α, α', γ, il est évident que la proposition est vraie, quels que soient α, α', γ.

Il est à remarquer que le polynôme (30) $Q(x, y)$ s'exprime de la façon suivante au moyen de la fonction F_2,

$$Q(x, y) = (\alpha, m)(\alpha', n)(1 - x - y)^{m+n}$$
$$\times F_2\left(\alpha + \alpha' - \gamma - m - n + 1, -m, -n, \alpha, \alpha', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right),$$

ainsi qu'on le montre plus loin (§ **27**).

21. On a vu précédemment (§ **14**) que les équations différentielles F_3 se ramènent à la forme F_2 par les substitutions

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}, \quad z = \xi^{\alpha}\eta^{\alpha'} z'.$$

On a donc, en se reportant à l'expression donnée précédemment de l'intégrale générale des équations F_2,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad = A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha+\alpha'-\gamma+1, \alpha, \alpha', \alpha-\beta+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\quad + B x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta+\beta'-\gamma+1, \beta, \beta', \beta-\alpha+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\quad + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha+\beta'-\gamma+1, \alpha, \beta', \alpha-\beta+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\quad + D x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta+\alpha'-\gamma+1, \beta, \alpha', \beta-\alpha+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),
\end{aligned}\right.$$

où A, B, C, D sont des constantes dont voici les valeurs. Posons

$$f(\lambda, \mu, \nu, \rho) = (-1)^{-\lambda}(-1)^{-\mu}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(\rho-\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)};$$

on a

$$A = f(\alpha, \alpha', \beta, \beta'), \quad B = f(\beta, \beta', \alpha, \alpha'),$$
$$C = f(\alpha, \beta', \beta, \alpha'), \quad D = f(\beta, \alpha', \alpha, \beta').$$

Cette formule (32) est analogue à celle que donne Gauss (*Werke*, III Band, p. 220, éq. 93). On peut obtenir la formule (32) en appliquant la formule de Gauss que je viens de citer à la fonction

$$F(\alpha', \beta', \gamma + m, y),$$

qui entre comme coefficient de x^m dans l'expression de F_3 sous la forme (2), puis ordonnant la fonction obtenue suivant les puissances de $\frac{1}{y}$, et appliquant encore une fois cette formule de Gauss.

L'on obtient par le même procédé la relation

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ &\quad = \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma' - \alpha)}(-y)^{-\alpha} F_4\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma', \gamma, \alpha + 1 - \beta, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma' - \beta)}(-y)^{-\beta} F_4\left(\beta, \beta + 1 - \gamma', \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right), \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit une relation analogue en permutant x avec y et γ avec γ'.

CHAPITRE IV.

22. Dans ce Chapitre, je m'occupe des propriétés des fonctions définies par l'équation différentielle unique

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &(x - x^2)r - 2xys + (y - y^2)t \\ &\quad + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0, \end{aligned}\right.$$

obtenue en ajoutant membre à membre les équations F_2 et faisant $\beta + \beta' = \delta$. Il suit de là que l'on a une infinité de solutions de cette équation en prenant

$$z = F_2(\alpha, \delta + h, -h, \gamma, \gamma', x, y),$$

h étant une constante arbitraire. On peut remarquer aussi qu'en ajoutant membre à membre les équations F_i, et faisant $x = \frac{x'}{2}$, $y = \frac{y'}{2}$, on obtient une équation différentielle qui est de la forme (34); de sorte que l'on a encore une solution de l'équation (34) en prenant

$$z = F_i\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

D'une manière générale, cherchons à satisfaire à l'équation (34) par une fonction entière

$$z = \sum A_{m,n} x^m y^n.$$

En substituant et égalant à zéro le coefficient de $x^m y^n$, on a

$$\begin{aligned}(m+1)(m+\gamma)A_{m+1,n} &+ (n+1)(n+\gamma')A_{m,n+1} \\ &= (m+n+\alpha)(m+n+\delta)A_{m,n}.\end{aligned}$$

Faisons

$$A_{m,n} = \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n}, \tag{35}$$

on a

$$B_{m+1,n} + B_{m,n+1} = B_{m,n}, \tag{36}$$

équation aux différences finies que l'on peut intégrer par la méthode de Lagrange (*Œuvres*, t. IV, p. 165). On trouve pour l'expression la plus générale de $B_{m,n}$

$$\left\{\begin{aligned}B_{m,n} = f(m) &- \frac{n}{1} f(m+1) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(m+2) + \cdots \\ &+ (-1)^n f(m+n),\end{aligned}\right. \tag{37}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned}B_{m,n} = \varphi(n) &- \frac{m}{1} \varphi(n+1) + \frac{m(m-1)}{1.2} \varphi(n+2) + \cdots \\ &+ (-1)^m \varphi(m+n).\end{aligned}\right. \tag{37'}$$

les fonctions f et φ étant *arbitraires*. Les deux expressions de $B_{m,n}$ ainsi trouvées ne sont pas distinctes; la première conviendra si l'on donne les coefficients $B_{m,0}$, car elle donne, en faisant $n = 0$, $f(m) = B_{m,0}$; la deuxième conviendra si l'on donne les coefficients $B_{0,n}$, car elle donne $\varphi(n) = B_{0,n}$.

En portant l'expression générale de $B_{m,n}$ dans (35), on a l'expression générale de $A_{m,n}$; d'où résulte l'expression suivante de la solution entière la plus générale de l'équation (34) :

$$(38)\quad \Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n} x^m y^n.$$

On voit, en particulier, que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ soit un polynôme est que α ou δ soit égal à un *entier négatif*. Si cette condition est remplie, $\alpha = -N$ par exemple, l'expression (38) donne une *infinité* de polynômes satisfaisant à l'équation (34).

23. Dans l'équation (34) faisons

$$z = x^\lambda y^\mu (1 - x - y)^\nu z',$$

et désignons par p', q', r', s', t' les dérivées partielles de z'. L'équation devient, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}
&(x - x^2) r' - 2xy s' + (y - y^2) t' \\
&\quad + [\gamma + 2\lambda - (\alpha + \delta + 2\lambda + 2\mu + 2\nu + 1) x] p' \\
&\quad + [\gamma' + 2\mu - (\alpha + \delta + 2\lambda + 2\mu + 2\nu + 1) y] q' \\
&\quad - (\alpha + \lambda + \mu + \nu)(\delta + \lambda + \mu + \nu) z' \\
&\quad + \frac{\lambda(\lambda + \gamma - 1)}{x} z' + \frac{\mu(\mu + \gamma' - 1)}{y} z' + \frac{\nu(\alpha + \delta - \gamma - \gamma' - \nu)}{1 - x - y} z' = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on donne à λ, μ, ν des valeurs annulant les trois derniers termes :

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda(\lambda + \gamma - 1) &= 0, \\ \mu(\mu + \gamma' - 1) &= 0, \\ \nu(\alpha + \delta - \gamma - \gamma' + \nu) &= 0, \end{aligned} \right.$$

l'équation prend la forme (34) où l'on aurait remplacé α, δ, γ, γ' par $\alpha+\lambda+\mu+\nu$, $\delta+\lambda+\mu+\nu$, $\gamma+2\lambda$, $\gamma'+2\mu$; par suite, elle admet, pour z', la solution

$$z'=\Phi(\alpha+\lambda+\mu+\nu,\ \delta+\lambda+\mu+\nu,\ \gamma+2\lambda,\ \gamma'+2\mu,\ x, y),$$

d'où, pour z,

$$z=x^{\lambda}y^{\mu}(1-x-y)^{\nu}z'.$$

Or, les équations (39) donnent pour λ, μ, ν huit groupes de valeurs; on a ainsi huit solutions de l'équation (34) dont voici le tableau :

λ.	μ.	ν.	
0,	0,	0,	$z_1=\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma')$,
$1-\gamma$,	0,	0,	$z_2=x^{1-\gamma}\Phi(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma')$,
0,	$1-\gamma'$,	0,	$z_3=y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha+1-\gamma', \delta+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma')$,
$1-\gamma$,	$1-\gamma'$,	0,	$z_4=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha+2-\gamma-\gamma', \delta+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma')$,
0,	0,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_5=(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma+\gamma'-\delta, \gamma+\gamma'-\alpha, \gamma, \gamma')$,
$1-\gamma$,	0,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_6=x^{1-\gamma}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma'-\delta+1, \gamma'-\alpha+1, 2-\gamma, \gamma')$,
0,	$1-\gamma'$,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_7=y^{1-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma-\delta+1, \gamma-\alpha+1, \gamma, 2-\gamma')$,
$1-\gamma$,	$1-\gamma'$,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_8=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(2-\delta, 2-\alpha, 2-\gamma, 2-\gamma')$.

Dans les fonctions Φ qui figurent dans ce tableau, on a laissé de côté les variables x et y, qui sont les mêmes dans les huit fonctions.

24. Parmi les fonctions qui satisfont à l'équation (34), je considère maintenant celles qui restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux conditions

$$(40)\qquad x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1-x-y\geq 0.$$

Ces fonctions possèdent des propriétés intéressantes que l'on trouve de la façon suivante.

Soit z une fonction satisfaisant à l'équation (34), et z_1 une fonction satisfaisant à l'équation

$$(34')\quad \left\{\begin{aligned}&(x-x^2)r_1-2xys_1+(y-y^2)t_1+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p_1\\&\qquad+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]q_1-(\alpha-\lambda)(\delta+\lambda)z_1=0,\end{aligned}\right.$$

obtenue en changeant, dans (34), α en $\alpha-\lambda$ et δ en $\delta+\lambda$ (λ désignant une indéterminée). Multiplions l'équation (34) par z_1, l'équation (34') par $-z$; et ajoutons. Nous avons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)(rz_1-zr_1)-2xy(sz_1-zs_1)+(y-y^2)(tz_1-zt_1)\\ &+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x](pz_1-zp_1)\\ &+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y](qz_1-zq_1)-\lambda(\delta-\alpha+\lambda)zz_1=0. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$pz_1-zp_1=\mathrm{P},\quad qz_1-zq_1=\mathrm{Q},$$

et remarquons que

$$2(sz_1-zs_1)=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}.$$

L'équation précédente devient

$$\begin{aligned} &(x-x^2)\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}-xy\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)+(y-y^2)\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\\ &+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]\mathrm{P}+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]\mathrm{Q}=\lambda(\delta-\alpha-\lambda)zz_1, \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[x^{\gamma}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(\mathrm{P}-\mathrm{P}x-\mathrm{Q}y)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(\mathrm{Q}-\mathrm{P}x-\mathrm{Q}y)\\ &\quad=\lambda(\delta-\alpha+\lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le premier membre

$$\mathrm{P}-\mathrm{P}x-\mathrm{Q}y \quad \text{par} \quad \mathrm{P}(1-x-y)+y(\mathrm{P}-\mathrm{Q})$$

et

$$\mathrm{Q}-\mathrm{P}x-\mathrm{Q}y \quad \text{par} \quad \mathrm{Q}(1-x-y)-x(\mathrm{P}-\mathrm{Q}),$$

l'équation devient

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[x^{\gamma}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}\mathrm{P}]\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}\mathrm{Q}]+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\\ &\quad=\lambda(\delta-\alpha+\lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1. \end{aligned}\right.$$

ou

$$H = x^{\gamma} y^{\gamma'} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} (P - Q).$$

Cela posé, supposons que les fonctions z, z_1 restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux inégalités (40), et que les fonctions Q, P, P — Q soient, aux limites, finies ou infinies d'ordre moindre que $\frac{1}{x^{\gamma}}$, $\frac{1}{y^{\gamma'}}$, $\frac{1}{(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}}$.

Multiplions les deux membres de l'équation (42) par $dx\,dy$, et prenons l'intégrale double étendue aux valeurs de x et y satisfaisant aux inégalités (40), en supposant, en outre,

$$(43) \qquad \gamma > 0, \quad \gamma' > 0, \quad \alpha + \delta - \gamma - \gamma' + 1 > 0.$$

On voit immédiatement que les intégrales provenant des deux premiers termes du premier membre sont nulles. Je vais montrer que l'intégrale

$$\int\int \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy$$

est nulle. Pour évaluer cette intégrale, faisons un changement de variables et posons

$$x = t + u, \quad y = t - u,$$

d'où

$$H = (t+u)^{\gamma}(t-u)^{\gamma'}(1-2t)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(P - Q).$$

On voit que

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u},$$

et l'on a

$$\int\int \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\int\int \frac{\partial H}{\partial u}\,du\,dt.$$

Dans la nouvelle intégrale, on peut intégrer par rapport à u; l'intégrale indéfinie est H; elle doit être prise entre les limites $u = -t$, $u = +t$; or, H s'annule aux deux limites, car γ et γ' sont positifs. L'intégrale est donc nulle, et l'on a

$$\lambda(\delta - \alpha + 1)\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1\,dx\,dy = 0.$$

On conclut de là que l'intégrale double

$$(11) \qquad I = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy$$

est nulle tant que

$$(11') \qquad (\lambda - \delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0.$$

25. Comme nous l'avons dit, ce théorème s'applique à deux fonctions z et z_1, solutions respectives des équations (34) et (34'), ces fonctions restant finies pour les valeurs (10) auxquelles s'étend l'intégration, et les trois fonctions Q, P, (P − Q) devenant aux limites infinies d'ordre moindre que $\frac{1}{x^{\gamma}}$, $\frac{1}{y^{\gamma'}}$, $\frac{1}{(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}}$.

Ces conditions sont évidemment remplies dans le cas particulier où les deux fonctions z et z_1 sont des polynômes; et alors la condition (11) exprime que les deux polynômes sont de degrés différents, car nous avons vu précédemment que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (34) admette comme solution un polynôme de degré k est

$$(\alpha + k)(\delta + k) = 0.$$

On peut encore démontrer que cette condition est nécessaire, en remarquant que, si l'équation (34) est vérifiée par un polynôme z de degré k, l'équation différentielle qui donne la fonction

$$U = \frac{d^{m+n} z}{dx^m \, dy^n}, \quad m + n = k$$

doit être vérifiée par U = const. Or, on forme facilement cette équation en différentiant le premier membre de l'équation (34) m fois par rapport à x et n fois par rapport à y; le coefficient de U dans l'équation obtenue est $(\alpha + k)(\delta + k)$; comme il doit être nul, on en conclut la condition indiquée.

26. Je vais appliquer la théorie générale précédente à certains polynômes particuliers qui présentent la plus grande analogie avec les polynômes de Jacobi.

Soit

$$U_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \frac{\partial^{m+n}\left[x^{m-\gamma-1} y^{n-\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n}\right]}{\partial x^m \, \partial y^n}.$$

On voit facilement, en employant une méthode analogue à celle indiquée par Didon (*Annales de l'École Normale*, t. V, p. 235), que ce polynôme satisfait aux équations

$$(45)\quad \begin{cases} (x-x^2)r - xys + [\gamma - (1+\gamma-n)x]p \\ \qquad - (m+\gamma)yq + (m+n)(m+\gamma)z = 0, \\ (y-y^2)t - xys + [\gamma' - (1+\gamma'-m)y]q \\ \qquad - (n+\gamma')xp + (m+n)(n+\gamma')z = 0. \end{cases}$$

Comme, en outre, ce polynôme se réduit à $(\gamma, m)(\gamma', n)$ pour $x = y = 0$, on a

$$U_{m,n} = (\gamma, m)(\gamma', n) F_2[-(m+n), m+\gamma, n+\gamma', \gamma, \gamma', x, y].$$

En ajoutant membre à membre les équations (45), on obtient l'équation

$$(46)\quad \begin{cases} (x-x^2)r - 2xys + (y-y^2)t \\ \quad + [\gamma - (1+\gamma+\gamma')x]p \\ \quad + [\gamma' - (1+\gamma+\gamma')y]q + (m+n)(m+n+\gamma+\gamma')z = 0, \end{cases}$$

qui rentre dans le type (34), en faisant

$$\alpha = -(m+n), \quad \delta = m+n+\gamma+\gamma'.$$

Donc, en supposant $\gamma > 0$, $\gamma' > 0$ et appliquant la formule générale, on trouve que l'intégrale

$$(47)\qquad I_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} U_{\mu,\nu} \, dx \, dy = 0,$$

tant que $m+n \gtrless \mu+\nu$; l'intégrale étant étendue, comme précédemment, aux valeurs de x et y, telles que

$$(48)\qquad x > 0, \quad y > 0, \quad 1-x-y > 0.$$

La formule (47) pourrait ici se démontrer directement de la façon suivante. Soit Z un polynôme quelconque, et considérons l'intégrale double

$$\begin{aligned} J &= \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} Z\, dx\, dy \\ &= \int\int \frac{\partial^{m+n}[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n} Z\, dx\, dy. \end{aligned}$$

En intégrant par parties m fois par rapport à x et n fois par rapport à y, on trouve

$$J = (-1)^{m+n} \int\int x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} Z}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy.$$

On voit immédiatement que J est nul si Z est un polynôme de degré moindre que $m+n$, ou un polynôme de degré $m+n$ ne contenant pas de terme en $x^m y^n$. Faisons en particulier, dans J, $Z = U_{\mu,\nu}$ avec $m+n = \mu+\nu$; alors la formule précédente donne

$$F^{\mu,\nu}_{m,n} = (-1)^{m+n} \int\int x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} U_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy.$$

Mais $\frac{\partial^{m+n} U_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}$ est une constante qu'il est facile de calculer d'après l'expression de $U_{\mu,\nu}$ au moyen de F_2: on a ainsi

$$\frac{\partial^{m+n} U_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n} = (-1)^{m+n} \frac{(\gamma,\mu)(\gamma',\nu)(\gamma+\mu,m)(\gamma'+\nu,n)(1,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)};$$

comme, d'autre part, l'intégrale $\int\int x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}\, dx\, dy$ est égale à

$$\frac{\Gamma(m+\gamma)\Gamma(n+\gamma')\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(2m+2n+\gamma+\gamma'+1)},$$

on a donc

$$(48)\quad F^{\mu,\nu}_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma^2(m+n+1)}{\Gamma(2m+2n+\gamma+\gamma'+1)} (\gamma,\mu+m)(\gamma',\nu+n), \quad \mu+\nu = m+n$$

Ces formules (47) et (48) *suffisent* pour calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables en série de poly-

nômes $U_{m,n}$. En effet, soit à développer $F(x, y)$ en série de la forme

$$F(x, y) = \Sigma A_{m,n} U_{m,n}. \tag{49}$$

Voici comment on peut calculer les coefficients des polynômes $U_{m,n}$ de degré donné k, $m + n = k$. Multiplions les deux membres de l'équation (49) par $x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$, en supposant $\mu + \nu = k$, et intégrons entre les limites déjà indiquées. Dans le deuxième membre, toutes les intégrales sont nulles, sauf celles qui répondent aux polynômes de degré k, et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\int\int F(x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy \\ &\quad = A_{k,0} I_{k,0}^{\mu,\nu} + A_{k-1,1} I_{k-1,1}^{\mu,\nu} + \ldots + A_{k-i,i} I_{k-i,i}^{\mu,\nu} + \ldots + A_{0,k} I_{0,k}^{\mu,\nu}. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Les entiers μ et ν étant assujettis à la seule condition $\mu + \nu = k$, on pourra leur donner $(k + 1)$ systèmes de valeurs qui fourniront $k + 1$ équations telles que (50). De ces $(k + 1)$ équations, on tirera les $k + 1$ coefficients

$$A_{k,0},\ A_{k-1,1},\ \ldots,\ A_{k-i,i},\ \ldots,\ A_{0,k}.$$

La méthode précédente de détermination des coefficients pourra s'appliquer à tous les développements en série de fonctions possédant des propriétés analogues à celles exprimées par les équations (47) et (48). La résolution des équations du premier degré, telles que (50), conduira à former un polynôme $V_{m,n}$ tel que l'intégrale

$$\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

soit nulle tant que l'on n'a pas $m = \mu$, $n = \nu$. Mais, dans le cas actuel, il est une façon plus simple d'obtenir ce polynôme de la façon suivante. Posons, en effet,

$$V_{m,n} = F_2(m + n + \gamma + \gamma', -m, -n, \gamma, \gamma', x, y).$$

On voit que $V_{m,n}$ est un polynôme de degré $m + n$, renfermant un seul terme de degré $m + n$, le terme en $x^m y^n$. Ce polynôme $V_{m,n}$ satisfait

à l'équation (46), à laquelle satisfait déjà le polynôme $U_{m,n}$, ainsi qu'il est facile de le voir d'après la théorie générale. Par suite on a, d'après la formule (44), en faisant

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

$K_{m,n}^{\mu,\nu} = 0$ tant que $m+n \gtrless \mu+\nu$. Supposons maintenant $m+n=\mu+\nu$. Alors, d'après un calcul déjà fait,

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \int\int x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} V_{\mu,\nu}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy.$$

Mais, comme $V_{\mu,\nu}$ contient un *seul terme* de degré $m+n$, à savoir le terme $x^\mu y^\nu$, on voit que $K_{m,n}^{\mu,\nu}$ est nul tant que l'on n'a pas $\mu=m$, $\nu=n$. Si l'on remarque en outre que

$$\frac{\partial^{m+n} V_{m,n}}{\partial x^m\, \partial y^n} = (-1)^{m+n} \frac{(m+n+\gamma+\gamma',\, m+n)}{(\gamma,\, m)(\gamma',\, n)} (1,m)(1,n),$$

on voit que

$$K_{m,n}^{m,n} = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma')}{\Gamma(m+n+\gamma+\gamma')\,(2m+2n+\gamma+\gamma')}.$$

Si alors on veut trouver les coefficients du développement (49), on voit immédiatement, en multipliant les deux membres par

$$x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} V_{m,n}\, dx\, dy$$

et intégrant, que

$$A_{m,n} = \frac{1}{K_{m,n}^{m,n}} \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} V_{m,n} F(x,y)\, dx\, dy.$$

27. Les polynômes

$$W_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} (1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\delta+m+n} \frac{\partial^{m+n} [x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{\delta-\gamma-\gamma'}]}{\partial x^m\, \partial y^n}$$

possèdent des propriétés analogues. On voit facilement que ces poly-

nômes satisfont à l'équation différentielle (34), dans laquelle

$$\alpha = -(m+n).$$

On a, en outre [1],

$$W_{m,n} = (\gamma, m)(\gamma', n)(1-x-y)^{m-n} F_2\left(\gamma+\gamma'-\delta, -m, -n, \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right),$$

28. Faisons dans l'équation différentielle (34) la substitution $x = \xi^2$, $y = \eta^2$; elle devient

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-\xi^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\eta\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} \\ &\quad + (1-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \left[(2\gamma-1)\frac{1}{\xi} - (2\alpha+2\delta+1)\xi\right]\frac{\partial z}{\partial\xi} \\ &\qquad + \left[(2\gamma'-1)\frac{1}{\eta} - (2\alpha+2\delta+1)\eta\right]\frac{\partial z}{\partial\eta} - 4\alpha\delta z = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons, en particulier,

$$\gamma = \gamma' = \tfrac{1}{2},$$

l'équation devient

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-\xi^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\eta\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} \\ &\quad + (1-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} - (2\alpha+2\delta+1)\left(\xi\frac{\partial z}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial z}{\partial\eta}\right) - 4\alpha\delta z = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui possède la propriété de ne pas changer quand on y fait la substitution

$$\xi = \xi'\cos\theta - \eta'\sin\theta, \quad \eta = \xi'\sin\theta + \eta'\cos\theta.$$

Pour les fonctions satisfaisant à cette équation (52) la formule (44) devient

$$\int\int x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} (1-x-y)^{\alpha+\delta-1} z z_1\, dx\, dy = 0,$$

à condition que

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0;$$

---

[1] Voir *Archiv der Mathematik und Physik* de Grünert, 1881, t. LXVI, p. 238.

et, en remplaçant les variables x et y par ξ^2, η^2,

$$(53)\qquad \int\int (1-\xi^2-\eta^2)^{\alpha+\delta-1} z z_1 \, d\xi \, d\eta = 0,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs de ξ, η telles que $1-\xi^2-\eta^2>0$.

Parmi les fonctions particulières précédentes se trouvent :

1° Les polynômes de M. Hermite $U'_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{m+n}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}$ et les polynômes adjoints $V'_{m,n}$ (Mémoire de Didon, *Annales de l'École Normale*, t. V, p. 237 et 243). Pour ces fonctions, $\alpha = -\frac{m-n}{2}$, $\delta = \frac{m+n}{2}+1$.

2° Les fonctions plus générales considérées par Didon

$$P_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{m+n+h}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}$$

(*loc. cit.*, p. 272). Pour ces fonctions, $\alpha = -\frac{m+n}{2}+h$, $\delta = \frac{m+n}{2}+1$, par suite $\alpha+\delta = h+1$. En particulier, on a les fonctions répondant à $h=\frac{1}{2}$, $h=-\frac{1}{2}$ (*loc. cit.*, p. 275). (Toutes ces fonctions peuvent d'ailleurs s'exprimer à l'aide de la fonction F_2).

3° Les fonctions sphériques. Prenons en effet l'équation différentielle de la fonction Y_n,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + n(n+1)z = 0,$$

et faisons

$$\sin\theta\cos\varphi = \xi, \quad \sin\theta\sin\varphi = \eta.$$

L'équation devient

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\xi\eta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}$$
$$+(1-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} - 2\eta\frac{\partial z}{\partial\eta} - 2\xi\frac{\partial z}{\partial\xi} + n(n+1)z = 0,$$

équation qui devient identique à l'équation (52) lorsqu'on donne.

dans cette dernière, à α et δ les valeurs

$$\alpha = -\frac{n}{2}, \quad \delta = \frac{n+1}{2}.$$

La formule (53) donne alors la formule bien connue qui sert à trouver les coefficients du développement d'une fonction de deux variables en série de fonctions sphériques.

29. *Sur quelques cas limites des fonctions précédentes.* — Les polynômes à une variable dont s'occupe M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 93-266) peuvent être considérés comme limites de certains polynômes de Jacobi. En effet, les polynômes de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 56, p. 149) satisfont à l'identité

$$(54) \quad F(\alpha+n, -n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]}{dx^n}.$$

Supposons que l'on ait

$$\gamma - 1 = \alpha - \gamma,$$

d'où

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{2}, \quad \gamma - 1 = \frac{\alpha-1}{2}, \quad \alpha - \gamma = \frac{\alpha-1}{2},$$

et faisons

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

ξ étant une nouvelle variable. L'équation (42) devient

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} &F\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] \\ &= \frac{\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha-1}{2}}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \alpha^{\frac{n}{2}} \frac{d^n\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}+n}}{d\xi^n}, \end{aligned} \right.$$

d'où enfin

$$\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha-1}{2}} \frac{d^n\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}+n}}{d\xi^n}$$
$$= \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{\alpha^{\frac{n}{2}}} F\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right].$$

Faisons croître α indéfiniment par valeurs positives, cette identité devient

$$e^{+\frac{\xi^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{d\xi^n} = \lim \frac{\left(\frac{\alpha-1}{2}, n\right)^n}{\alpha^2} F\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right],$$

où le premier membre est un polynôme de M. Hermite.

Les polynômes de deux variables analogues aux précédents considérés par M. Hermite se rattachent d'une façon semblable aux fonctions précédentes satisfaisant à l'équation (44). Pour le montrer, je rappelle que le polynôme

$$U^{n}_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} \frac{\partial^{m+n} e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}}{\partial x^m \, \partial y^n}$$

de M. Hermite satisfait à l'équation différentielle

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} & c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \\ & - (ac-b^2)\left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} - (m+n)U\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

ainsi qu'il résulte des équations simultanées indiquées par M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 93-266). Dans l'équation (56), faisons

$$(57)\qquad x = \frac{1}{\sqrt{a}}x' - \frac{b}{\sqrt{a\Delta}}y', \quad y = \sqrt{\frac{a}{\Delta}}y', \quad \Delta = ac-b^2;$$

elle devient

$$(58)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} - \left(x'\frac{\partial U}{\partial x'} + y'\frac{\partial U}{\partial y'}\right) + (m+n)U = 0.$$

Cela posé, dans l'équation générale (52), faisons

$$\delta = -\frac{m+n}{2}, \quad \alpha = \frac{m+n}{2} + t, \quad \xi = \frac{x'}{\sqrt{2t}}, \quad \eta = \frac{y'}{\sqrt{2t}};$$

cette équation prend la forme

$$(2t - x'^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - 2x'y'\frac{\partial^2 z}{\partial x'\,\partial y'} + (2t - y'^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}$$
$$- (2t + 1)\left(x'\frac{\partial z}{\partial x'} + y'\frac{\partial z}{\partial y'}\right) + (m + n)(2t + m + n)z = 0.$$

Si l'on fait croître t indéfiniment, après avoir divisé tous les termes par t, cette équation tend vers une équation limite qui n'est autre que l'équation (58), à laquelle satisfait le polynôme $U''_{m,n}$.

L'équation (53) donne, comme on le voit immédiatement, la propriété fondamentale des polynômes $U''_{m,n}$. En effet, faisons-y d'abord

$$\xi = \frac{x'}{\sqrt{2t}}, \quad \eta = \frac{y'}{\sqrt{2t}},$$

et faisons croître t indéfiniment; elle donne

$$\int\int e^{\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)} z z_1 \, dx' \, dy' = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs des variables. Puis, d'après (57), faisons

$$y' = y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}, \quad x' = x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}}y,$$

nous avons

$$\int\int e^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} z z_1 \, dx \, dy = 0,$$

ce qui est la propriété bien connue de ces polynômes $U_{m,n}$.

Théorie de l'Électrostatique;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Dans l'exposé suivant, nous n'avons aucune prétention à l'invention. Nous n'avons pour objet que de coordonner, à notre point de vue, les résultats non sujets à contestation obtenus par Poisson et ses savants successeurs, Gauss, Green, Clausius, Bertrand, etc.

Sans remonter plus haut, nous trouvons la fonction des forces dans les *Œuvres* de Laplace et de Lagrange. Plus tard Gauss désigne cette fonction sous le nom de *potentiel*, expression qui est devenue depuis d'un usage général dans l'enseignement.

L'emploi du potentiel en électrostatique est souvent entaché d'obscurité, à ce point que bien des géomètres physiciens ont prétendu que l'on y faisait une trop large part à l'arbitraire et n'ont pas, par suite, montré une grande sympathie pour ce genre de recherches. Nous nous sommes surtout attaché à faire disparaître les ambiguïtés.

Les formules de Green se manient avec la plus grande sûreté lorsqu'on y regarde d'un peu près; elles n'ont d'ailleurs d'autre objet que de conduire immédiatement à certains résultats généraux et de supprimer des combinaisons pénibles d'intégrales définies, auxquelles on est conduit en suivant la voie ordinaire tracée par la Mécanique rationnelle.

2. Pour expliquer les faits qui se rapportent à l'électricité à l'état

d'équilibre, on a recours à une hypothèse que l'on peut résumer ainsi qu'il suit :

« Lorsqu'un corps n'est pas électrisé ou qu'il se trouve à l'état naturel, dans chacune de ces molécules se trouvent concentrés deux fluides impondérables, en quantités égales censées indéfinies, qui sont à l'état de combinaison. Quoique ces deux fluides se neutralisent ou qu'ils ne produisent aucun effet physique, on est cependant convenu d'appeler *fluide neutre* leur état de combinaison. »

Pour que le corps soit électrisé, il faut qu'il y ait décomposition partielle du fluide neutre dans ses deux éléments et que, par un procédé quelconque, on ait fait disparaître un de ces éléments, ou encore que l'on ait réparti ces mêmes éléments sur deux parties distinctes du corps.

Les deux éléments du fluide neutre ont reçu respectivement les noms de *fluide positif* et de *fluide négatif*. Quoiqu'ils n'aient qu'un caractère fictifs, on suppose qu'ils jouissent des propriétés de la matière; c'est ainsi que l'on considère une molécule matérielle électrisée comme renfermant une molécule électrique, dont la masse mesure l'*intensité* de l'électricité.

En partant de là et des lois de Coulomb, on a été conduit à poser ce principe élémentaire :

Deux molécules s'attirent ou se repoussent, suivant qu'elles appartiennent aux deux électricités de signe contraire ou à la même électricité; leur action mutuelle est proportionnelle à leurs masses et varie en raison inverse du carré de leur distance.

Nous admettrons que chaque masse électrique élémentaire a une valeur algébrique et qu'elle porte avec elle le signe de l'électricité à laquelle elle appartient. Ainsi, si m est la masse d'une molécule électrique appartenant à l'électricité positive, elle devra être prise en valeur absolue; si m'_1 est la masse d'une autre molécule électrique agissant sur la précédente, elle devra être considérée comme positive ou négative selon qu'elle appartiendra à la même électricité que m ou à l'autre électricité.

En désignant par r_1 la distance des m, m'_1, nous représenterons par

$$\frac{mm'_1}{r_1^2}$$

leur action mutuelle, qui sera positive si c'est une répulsion et négative dans le cas contraire. Nous supposons ainsi que l'on prend pour unité de force électrique l'action mutuelle de deux masses électriques égales à l'unité, dont la distance est aussi égale à l'unité.

Le travail total de l'action ci-dessus, pour une variation quelconque de r_1, sera aussi

$$mm'_1 \int \frac{dr_1}{r_1^2} = -\frac{mm'_1}{r_1} + \text{const.}$$

3. *Fonction potentielle et potentiel.* — Soient

m'_1, m'_2, ..., m'_i, ... les masses de molécules électriques agissant simultanément sur la masse m.

x, y, z les coordonnées du point m parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

x'_i, y'_i, z'_i les coordonnées semblables du point m'_i;

$r_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}$ la distance mm'_i;

X, Y, Z les composantes parallèles aux axes ci-dessus de la résultante F des actions exercées sur m par les m'_i.

Nous désignerons sous le nom de *fonction potentielle* la fonction de x, y, z définie par

$$(1) \qquad V = -\left(\frac{m'_1}{r_1} + \frac{m'_2}{r_2} + \cdots + \frac{m'_i}{r_i} + \ldots\right) = \sum -\frac{m'_i}{r_i},$$

et de *potentiel* de la masse m l'expression

$$(2) \qquad mV.$$

Le potentiel n'est autre chose, à une constante près, que le travail total de F ou des actions exercées par les m'_i sur m lorsqu'on fait varier les distances r'_i de quantités finies.

Supposons que les molécules m'_i forment une masse électrique telle qu'on puisse la considérer comme continue; soient du un élément de volume en un point quelconque m' de cette masse, ρ la densité correspondante, positive ou négative selon la nature du fluide; comme on peut prendre $m' = \rho\, du$, nous aurons, au lieu de l'équation (1), la suivante

$$V = -\int \rho \frac{du}{r}, \tag{3}$$

l'intégrale s'étendant à toute la masse fluide.

La fonction potentielle peut être étudiée indépendamment de toute idée de masse attribuée au point m ainsi réduit à l'état d'un point géométrique, point que nous désignerons sous le nom de *centre potentiel*. En faisant varier la position de ce centre, on n'obtiendra un potentiel que lorsque ce centre pénétrera dans l'intérieur de la masse fluide considérée ou dans une autre masse sur laquelle agit cette dernière.

4. *Propriétés du potentiel et de la fonction potentielle.* — Les formules relatives à l'attraction d'un corps grave sur un point matériel [1] s'appliquent évidemment ici, en y changeant le signe de V.

Nous avons d'abord

$$X = m\frac{dV}{dx}, \quad Y = m\frac{dV}{dy}, \quad Z = m\frac{dV}{dz}. \tag{4}$$

Concevons que l'on fasse subir à m un déplacement élémentaire $d\xi$ suivant une certaine direction $m\xi$ et soit F_ξ la composante de F suivant cette direction. Nous aurons, en égalant entre elles deux expressions du travail élémentaire,

$$m\, dV = F_\xi\, d\xi,$$

d'où

$$F_\xi = m\frac{dV}{d\xi}. \tag{5}$$

---

[1] *Œuvres de Laplace*, t. II, liv. III; Duhamel, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique* (édit. de 1845), t. II, p. 165 et suiv.; H. Resal, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, Ch. III.

En désignant par C une constante arbitraire, l'équation en x, y, z,

$$V = C,$$

représente une famille de surfaces dites *de niveau*.

Si m est un point de l'une de ces surfaces, et si la direction de $m\xi$ est comprise dans le plan tangent à cette surface, nous aurons, en vertu de la formule (5),

$$F_\xi = 0,$$

et l'action exercée sur m est par suite *normale* à la surface de niveau correspondante

Soit dn la portion de la normale à la surface de niveau ci-dessus, menée au point m, limitée par une autre surface de niveau qui en est infiniment voisine; nous aurons

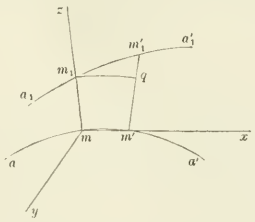
$$(6) \qquad F = m\frac{dV}{dn} \qquad (^1).$$

---

(1) Il nous paraît intéressant de trouver l'expression de l'angle formé par les plans tangents en deux points correspondants de deux surfaces de niveau consécutives.

Soient (*fig.* 1) $V = C$, $V = C + dC$ les équations de ces surfaces (A) et (A_1); m_1 les points où la normale au point m de la première rencontre la seconde ou

Fig. 1.



le point correspondant de m. Nous prendrons pour plan de la figure celui de l'une des sections principales de (A) en m, déterminant dans cette surface la courbe aa' et dans l'autre le profil $a_1a'_1$.

Portons sur aa' à partir de m la longueur infiniment petite $mm' = ds$ et dési-

Si le point m n'est pas compris dans l'intérieur de la masse fluide, la fonction potentielle satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$(7) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Dans le cas contraire, on a

$$(8) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi\rho,$$

ρ étant la densité du fluide au point intérieur m.

---

gnons par m'_1 le point correspondant de m'; menons en m_1 la parallèle à mm' jusqu'à sa rencontre q avec $m'm'_1$, nous avons, en supposant la masse m égale à l'unité.

$$dn = \overline{mm_1},$$

$$F = \frac{dC}{dn}, \quad dn = \frac{dC}{F},$$

$$m'_1q = \frac{d\,dn}{ds}\,ds = dC\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds},$$

et, en appelant i l'angle $\widehat{m'_1m_1q}$,

$$i = \frac{\overline{m'_1q}}{\overline{m_1q}}\,\frac{dC}{\overline{mm'}}\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds}\,ds = dC\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds}.$$

Si l'on distingue par un accent les valeurs de i et ds qui se rapportent à l'autre section principale, on a de même

$$i' = dC\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds'}.$$

Prenons les directions de mm_1, mm' pour axes des z et des x, l'équation du plan parallèle en m au plan tangent mené au point m_1 sera

$$x \operatorname{tang} i + y \operatorname{tang} i' - z = 0.$$

Le cosinus de l'angle cherché γ, que forme ce plan avec le plan xmy, sera donné par

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i + \operatorname{tang}^2 i'}},$$

d'où

$$\gamma = \sqrt{i^2 + i'^2} = \frac{dC}{F^2}\sqrt{\frac{dF^2}{ds^2} + \frac{dF^2}{ds'^2}}.$$

Enfin, si le point m se trouve à la surface, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 2\pi\rho \quad (9)$$ [1].

§ II. — De l'équilibre électrique d'un conducteur.

3. *Niveau potentiel.* — Si, à un instant quelconque, un corps conducteur possède une certaine quantité libre d'électricité, cette quantité ne subira aucune modification que si l'on se trouve dans les conditions suivantes :

1° Le corps doit être placé dans un milieu non conducteur, et qui exerce sur sa surface une pression supérieure à zéro; 2° il ne doit se trouver en contact qu'avec des corps non conducteurs; 3° il doit être suffisamment éloigné d'autres conducteurs, pour que ces derniers n'exercent sur lui aucune action appréciable.

Si l'équilibre électrique est établi, *les deux fluides restent à l'état de combinaison dans toutes les molécules matérielles du corps.*

En effet, supposons que, en un point de ce corps, le fluide neutre se trouve décomposé en ses deux éléments égaux m et m'. L'un de ces éléments étant soumis à une attraction et l'autre à une répulsion, ils se sépareraient de plus en plus, c'est-à-dire qu'il y aurait mouvement de l'électricité, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'équilibre.

Ainsi donc il ne s'exerce aucune action électrique dans le corps à partir de sa surface, c'est-à-dire que l'on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

ou, d'après les équations (4), que la fonction potentielle a une valeur constante dans tout l'intérieur du corps. Cette constante, qui joue un

---

[1] On ne donne pas généralement cette formule, mais on l'établit de la même manière que la formule (8), par la considération d'une sphère d'un rayon infiniment petit ayant son centre en m. Mais l'on voit ici que l'on ne doit considérer que la moitié du potentiel de cette sphère.

rôle important dans la théorie de l'Électrostatique, a reçu le nom de *niveau potentiel.*

L'équation (8) donne, pour l'intérieur du corps, $\rho = 0$, ce qui devait paraître évident à priori. On déduit de là que le potentiel d'un point intérieur du conducteur est nul.

D'après ce qui précède, on voit que la seule hypothèse que l'on puisse faire est de supposer que l'électricité forme une couche répandue sur la surface du corps, et que cette surface est une surface de niveau [1]. L'épaisseur de la couche, généralement variable d'un point à un autre de la surface du corps, ne peut pas être appréciée; toutefois, on admet qu'elle est très petite.

La couche électrique n'exerçant aucune action sur le corps, réciproquement le corps, dans ses éléments, n'exerce aucune action sur la couche. D'où il suit que chaque molécule électrique de cette couche n'est soumise qu'aux forces répulsives provenant des autres parties de la même couche.

La fonction potentielle changera brusquement de valeur quand on passera d'un point de la surface à un point de la couche qui en sera aussi voisin que l'on voudra; il en sera de même lorsque l'on passera d'un point de la couche à un point de sa surface extérieure; c'est ce qui résulte des équations (8) et (9).

6. *Densité électrique superficielle. Charge électrique.* — Soient $d\omega$ un élément de la surface du corps; ε et ρ l'épaisseur et la densité correspondantes de la couche électrique; on peut prendre $du = \varepsilon d\omega$, et la formule (3) devient

$$V = -\int \rho\varepsilon \frac{d\omega}{r}.$$

Mais, comme il est impossible d'apprécier ρ et ε, il est plus simple

---

[1] La surface libre de la couche ne sera généralement pas une surface de niveau, quoiqu'elle ne soit soumise qu'à une pression normale. En effet, la condition qui exprimerait qu'elle est de niveau sera presque toujours incompatible avec celle qui exprime que la valeur de la fonction potentielle de la couche est constante pour tous les points du corps conducteur. La distribution des pressions dans la couche différera donc quelque peu de celle que donne l'Hydrostatique.

de poser

$$\rho\varepsilon = h,$$

h étant ce que l'on est convenu d'appeler la *densité superficielle de l'électricité*. On a ainsi, pour la fonction potentielle,

$$V = -\int h \frac{d\omega}{r}, \tag{15}$$

et pour la masse de la couche électrique, c'est-à-dire la *charge électrique* du corps,

$$M = \int h\, d\omega. \tag{16}$$

Des considérations qui précèdent, il résulte que l'électricité peut être regardée comme formant, à la surface du conducteur, une pellicule sans épaisseur appréciable, mais ayant une densité constante ou variable par unité de surface.

7. *Relation entre deux charges que peut recevoir un conducteur et les deux fonctions potentielles correspondantes relatives à un même centre.* — Si l'on substitue à la couche électrique dont la densité superficielle est h une autre couche dont la densité soit proportionnelle à cette dernière, la nouvelle satisfera encore à la condition de l'équilibre électrique, car, puisque V est constant dans l'intérieur du corps dans le premier cas, il le sera également dans le second.

Soient M′ et V′ ce que deviennent M et V, lorsqu'on passe du premier état d'équilibre au second, en concevant le même centre potentiel. Nous aurons évidemment

$$\frac{M'}{M} = \frac{V'}{V}, \tag{17}$$

et, en distinguant par l'indice o les valeurs que prennent V′ et V lorsque le centre potentiel se trouve dans l'intérieur du conducteur,

$$\frac{M'}{M} = \frac{V'_0}{V_0}. \tag{17'}$$

On voit ainsi que deux charges électriques successives d'un même corps sont *proportionnelles aux niveaux potentiels correspondants.*

On comprend ainsi ce que l'on doit entendre en disant que l'on *charge un corps à un niveau potentiel déterminé.*

Les formules (17) et (17') peuvent se mettre sous les formes suivantes,

$$MV' = M'V, \tag{18}$$

$$MV'_0 = M'V_0. \tag{18'}$$

8. *Rappel d'une formule de Green.* — Soient

U, V deux fonctions des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, assujetties, ainsi que leurs dérivées partielles, à rester finies dans un volume terminé par une surface fermée ;

du, $d\omega$ deux éléments respectifs du volume de la surface ;

dn une longueur infiniment petite portée à partir de la surface sur la normale extérieure.

On a la relation

$$\left\{\begin{aligned} &\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)-\int U\frac{dV}{dn}\,d\omega \\ &\quad=\int V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)-\int V\frac{dU}{dn}\,d\omega, \end{aligned}\right. \tag{A}$$

dans laquelle la première et la troisième intégrale se rapportent au volume et les deux autres à la surface.

Prenant $U = 1$, on a simplement

$$\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)du=\int\frac{dV}{dn}\,d\omega. \tag{A'}$$

9. *Action exercée par une couche électrique en équilibre sur un point de sa masse.* — Ce problème comporte trois questions que nous allons examiner successivement.

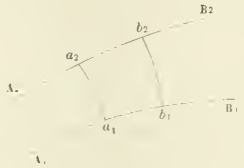
1° Soient (*fig.* 2)

A_1B_1, A_2B_2 deux surfaces de niveau comprises dans la couche, qu'il est inutile jusqu'à nouvel ordre de considérer comme extrêmement voisines;

$d\omega_1 = a_1b_1$ un élément de la première d'entre elles;

$d\omega_2 = a_2b_2$ l'élément de la seconde, déterminé par le lieu géométrique

Fig. 2.



des courbes [1] partant des points du périmètre de $d\omega_1$, et qui sont normales aux surfaces de niveau comprises entre A_1B_1, A_2B_2.

Supposons que A_1B_1 soit celle des deux surfaces qui se trouve la plus rapprochée de la surface du conducteur.

Nous allons appliquer la formule (A') au volume $a_1a_2b_1b_2$. Si l'on a égard à l'équation (8), qui s'applique à tous les points intérieurs de ce volume, on voit que le premier membre de la formule précitée se réduit à

$$4\pi \int \rho\, du = 4\pi\, dM,$$

dM étant la masse électrique contenue dans le volume considéré.

La surface latérale (a_1a_2, b_2b_1) ne donnera pas de terme dans le second membre de la formule (A'), puisque, en chacun de ses points, la force lui est tangente. L'élément $a_2b_2 = d\omega_2$ donnera le terme $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$, et l'élément $d\omega_1$, le terme $\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$; mais il faudra donner à cette dernière expression le signe —, si l'on continue à désigner par

[1] Les courbes de cette nature ont reçu de Faraday le nom de *lignes de force* (*Experimental researches in electricity*, t. I, p. 383 et suiv.), parce que la tangente en chacun de leurs points donne la direction de la force correspondante.

dn la distance du point a_1 de la surface A_1B_1 à une surface de niveau qui en est infiniment voisine, et comprise entre elle et A_2B_2, tandis que, au point de vue de la formule (12), dn a une signification contraire. Nous avons donc

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dN}{dn}\right)_2 d\omega_2 - \left(\frac{dN}{dn}\right)_1 d\omega_1 = 4\pi\, dM \quad [1],$$

ce qui exprime que *la différence des forces électriques qui s'exercent sur deux éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale au produit par 4π de la masse électrique contenue dans le volume orthogonal déterminé par ces deux éléments.*

2° Supposons maintenant que A_1B_1 soit la surface du conducteur; comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le terme $\left(\frac{dN}{dn}\right)_1 d\omega$ correspond à un déplacement normal dans l'intérieur du corps où la fonction potentielle est constante; ce terme est donc nul.

En admettant maintenant que la couche électrique soit extrêmement mince, que A_2B_2 passe par un point de la surface libre situé dans l'intérieur de la surface latérale (a_1a_2, b_1b_2), nous pourrons prendre

$$dM = h\, d\omega_2,$$

h étant la densité de la couche électrique en a_1; en supprimant l'indice 2 devenu inutile, l'équation (α) se réduit ainsi à la suivante,

$$(19) \qquad \frac{dN}{dn} = 4\pi h,$$

qui exprime que :

La force, rapportée à l'unité de masse exercée en un point de la couche électrique, est égale au produit par 4π de la densité superficielle correspondante.

3° L'action totale exercée sur la masse (a_1a_2, b_1b_2) sera

$$h\, d\omega \,.\, 4\pi h = 4\pi h^2\, d\omega.$$

---

[1] En supposant $dM = 0$, on retombe sur un théorème de Michel Chasles.

Soient P la pression extérieure normale censée constante (estimée en unités de force électrique) exercée sur la pellicule électrique; $N\,d\omega$ la réaction de la surface du corps conducteur sur l'élément $d\omega$; on a

$$N = P - 4\pi h^2.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, comme nous l'avons supposé, il faut que N soit positif et que l'on ait, par suite,

$$(20) \qquad \max. h^2 < \frac{P}{4\pi}.$$

Dans le cas de l'égalité, l'équilibre serait instable et le fluide tendrait à s'écouler au point de la surface correspondant au maximum de h^2.

10. *Distribution de l'électricité sur un ellipsoïde.* — On sait qu'une couche homogène n'exerce aucune action sur un point et son intérieur lorsqu'elle est limitée par deux surfaces ellipsoïdales concentriques dont les axes coïncident en direction. On déduit de là qu'une couche électrique sur un ellipsoïde peut être considérée comme ayant une densité de masse constante ρ, et comme étant limitée extérieurement par une surface semblable dans les conditions ci-dessus définies. Il nous est inutile, jusqu'à nouvel ordre du moins, de supposer que la couche est extrêmement mince.

Soient

a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, dont les directions sont Ox, Oy, Oz;

λ le rapport de similitude de la surface libre de la couche;

p la distance du centre O au plan tangent mené au point (x, y, z) de la surface du conducteur;

$e = (\lambda - 1)p$ l'épaisseur correspondante de la couche.

Nous avons

$$(a) \qquad \begin{cases} M = \frac{4}{3}\pi abc.\rho(\lambda^3 - 1), \\ h = \rho(\lambda - 1)p, \end{cases}$$

d'où

$$(b)\qquad h = \frac{3}{4}\,\frac{Mp}{\pi abc(\lambda^2+\lambda+1)},$$

ou, en remplaçant p par sa valeur en fonction des coordonnées,

$$(c)\qquad h = \frac{3}{4}\,\frac{M}{\pi abc(\lambda^2+\lambda+1)\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$$

Pour déterminer le niveau potentiel, nous pourrons prendre pour centre potentiel le centre O de l'ellipsoïde.

Concevons un cône partant du sommet O, et dont l'ouverture sphérique, infiniment petite, soit $d\omega$. Ce cône déterminera dans la couche un élément de volume que nous pourrons diviser en d'autres éléments secondaires par les surfaces infiniment voisines semblables à celle de l'ellipsoïde.

Soient r, $r' = ru$ les portions d'une génératrice du cône déterminées par l'ellipsoïde et l'une des surfaces ci-dessus; la fonction potentielle d'un élément secondaire sera

$$-\rho r'^2\, d\omega \frac{dr'}{r'} = \rho r^2\, d\omega\, u\, du,$$

et, en intégrant entre les limites $u = 1$, $u = \lambda$, on obtiendra, pour celle de l'élément déterminé par le cône,

$$-\rho\,\frac{(\lambda^2-1)}{2}\, r^2\, d\omega.$$

Ainsi donc nous aurons, pour le niveau potentiel cherché,

$$(d)\qquad V_0 = -\rho\,\frac{(\lambda^2-1)}{2}\int r^2\, d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde.

Soient θ et φ les angles formés par r avec Oz et ses projections sur

ce plan xOy avec Ox; nous avons

$$d\omega = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

et de l'équation de l'ellipsoïde on tire, par suite,

$$r^2 = \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

La formule (d) devient ainsi

$$V_0 = -\rho\frac{(\lambda^2-1)}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0 \frac{\sin\theta\, d\theta}{\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{b^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

ou encore

$$(e)\quad V_0 = -\rho\frac{(\lambda^2-1)}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} \frac{du}{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2} + \left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} - \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)u^2};$$

en posant $u = \cos\theta$.

Supposons d'abord que les trois axes soient inégaux et que l'on ait

$$a > b > c,$$

et posons

$$A^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}, \quad B^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

L'intégrale par rapport à u de l'expression (e) prend la forme

$$\frac{1}{AB}\int_{-1}^{1} \frac{\dfrac{dBu}{A}}{1 + \dfrac{B^2u^2}{A^2}} = \frac{2}{AB}\operatorname{arctang}\frac{B}{A};$$

par suite, on a

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} V_0 &= -\rho(\lambda^2-1)\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}} \\ &\quad \times \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}, \end{aligned}\right.$$

intégrale qu'il est impossible de déterminer dans le cas général; toutefois, le problème se trouve ramené à une quadrature.

Mais l'intégration s'effectue facilement quand l'ellipsoïde est de révolution; admettons, en effet, que l'on ait $a = b$, la formule (e) devient

$$V_0 = -\pi\rho(\lambda^2-1)a^2\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)u^2};$$

selon que $a > c$ ou $a < c$, ou que l'ellipsoïde est aplati ou allongé, on trouve, en ayant égard à la formule (a),

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} V_0 &= -2\rho\pi(\lambda^2-1)a^2\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}} \\ &= -\frac{3}{2}\frac{(\lambda-1)M}{(\lambda^2+\lambda+1)c}\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}, \end{aligned}\right.$$

ou

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} V_0 &= -2\pi\rho\frac{(\lambda^2-1)a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} \\ &= -\frac{3}{2}\frac{(\lambda+1)M}{(\lambda^2+\lambda+1)\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Hypothèse d'une couche très mince. — Comme $\lambda - 1$ est très petit, nous pouvons faire $\lambda = 1$ dans l'équation (c), qui devient

$$(c') \qquad h = \frac{M}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Si l'on a $a > b > c$, le minimum de h correspondra à $x = 0$, $y = 0$, $z = c$, et sera

$$h = \frac{M}{4\pi ab},$$

et son maximum,

$$h = \frac{M}{4\pi bc}.$$

En portant cette dernière valeur dans la formule (18) du numero précédent, on trouve que, pour que la couche puisse être en équilibre, il faut que

$$M < 2bc\sqrt{P}.$$

On voit ainsi que si l'ellipsoïde est très allongé, ou si b et c sont tres petits, il arrivera que, même sous une très faible charge, l'électricité tendra à s'écouler ou s'écoulera aux sommets du grand axe, ce qui, à un certain point, peut expliquer le pouvoir des pointes.

En éliminant z dans la formule (c) au moyen de l'équation de l'ellipsoïde, on trouve

$$(c_1) \qquad h = \frac{M}{4\pi ab\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}}.$$

Supposons que l'ellipsoïde soit assez aplati dans la direction de Oz pour qu'il devienne en quelque sorte un plateau elliptique. A une distance suffisante du bord, le terme $c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$ sera très petit par rapport à $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, et l'on aura sensiblement

$$h = \frac{M}{4\pi ab}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Dans le voisinage du bord, $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ devient, au contraire, très petit par rapport à $c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$, et l'on a alors, à très peu près,

$$h = \frac{M}{4\pi abc}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{M}{4\pi a^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2}}.$$

Dans le cas d'une sphère dont le rayon est a, la formule (c') donne ce résultat évident à priori

$$h = \frac{M}{4\pi a^2}.$$

En faisant $\lambda = 1$ dans le troisième membre des formules (g) et (h), on trouve

$$(g') \qquad V_0 = -\frac{M}{c}\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}},$$

$$(h') \qquad V_0 = -\frac{M}{c}\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}\log\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}.$$

Si $a = c$, on déduit facilement de ces formules la suivante

$$V_0 = -\frac{M}{a},$$

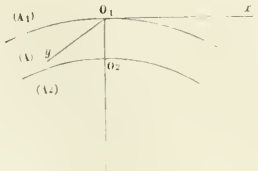
qui est relative à la sphère et qui est évidente.

§ III. — Des systèmes de conducteurs.

11. *Condition d'équilibre électrique de deux corps conducteurs terminés par des surfaces parallèles* (théorie de Green). — Considérons deux corps conducteurs (A_1, A_2) chargés d'électricité dont les surfaces

sont parallèles, très peu éloignées l'une de l'autre et séparées par une substance non conductrice (A).

Fig. 3.



Soient (*fig.* 3)

O_1 un point quelconque de la surface du premier corps;
O_2 le point où la normale $O_1 z$ en O_1 rencontre la surface du second corps;
$O_1 x$, $O_1 y$ deux axes rectangulaires compris dans le plan tangent en O;
e l'épaisseur constante de (A) supposée assez petite pour qu'on puisse négliger celles de ses puissances qui sont supérieures à la seconde;
h_1, h_2 les densités électriques superficielles et V_1, V_2 les niveaux potentiels de (A_1) et (A_2);
V la fonction potentielle, variable d'un point à un autre de (A).

Nous admettrons, pour fixer les idées, que la surface de (A_1) oppose sa convexité au plan tangent xO_1y et nous désignerons par l'indice 1 les dérivées partielles qui se rapportent à l'origine O_1.

Nous avons

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 e + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{e^2}{2}. \tag{21}$$

Pour un point infiniment voisin de O_1 situé sur l'intersection de la surface (A_1) et du plan zO_1x, on a, en remarquant que $dV = 0$ et que dz est du second ordre par rapport à dx,

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 dz + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{dx^2}{2}.$$

Si R_x désigne le rayon de courbure au point O_1 de la section considé-

rée, on a

$$dz = \frac{dx^2}{2R_x},$$

et l'équation précédente se transforme dans la suivante

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1\right]dx.$$

Comme cette dernière doit être vérifiée quel que soit dx, il faut que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = 0,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

En désignant par R_y le rayon de courbure en O_1 de la section faite dans la surface de (A_1) par le plan zO_1y, on aurait de même

$$(\beta) \qquad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_y}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1;$$

mais, comme (A) est extérieur à (A_1), V doit satisfaire à l'équation (7) du n° 4; en substituant dans cette équation les valeurs (α), (β) et désignant par $\frac{1}{\Gamma}$ la courbure $\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$ de la surface en O_1, on trouve

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

L'équation (21) devient alors

$$V_2 - V_1 = e\left(\frac{dV}{dz}\right)_1\left(1 + \frac{e}{2\Gamma}\right).$$

Mais on a, en vertu de la formule (19) du n° 9,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = 4\pi h_1.$$

par suite

$$(22) \qquad V_2 - V_1 = 4\pi e h_1 \left(1 + \frac{e}{2\Gamma}\right).$$

Supposons maintenant que l'on place l'origine des coordonnées en O_2 en dirigeant l'axe des z suivant O_2O_1; la courbure de la surface de (A_2) en O_2 sera de signe contraire à celle de la surface de (A_1) en O_1, mais pourra être considérée comme étant égale à $\frac{1}{\Gamma}$ en valeur absolue. De l'équation (22) on déduira ainsi la suivante

$$(22') \qquad V_1 - V_2 = 4\pi e h_2 \left(1 - \frac{e}{2\Gamma}\right),$$

et de ces deux formules

$$(23) \qquad h_2 = - h_1 \left(1 + \frac{e}{\Gamma}\right).$$

Soient $d\omega_1$ un élément de la surface de (A_1) en O_1; $d\omega_2$ l'élément déterminé sur la surface de (A_2) par les normales menées aux différents points du périmètre de $d\omega_1$, on a, aux termes du second ordre près,

$$(24) \qquad d\omega_2 = d\omega_1 \left(1 - \frac{e}{\Gamma}\right) \qquad [1],$$

---

[1] Soient

$$mn = ds, \quad mn' = ds'$$

les éléments respectifs des deux lignes de courbure passant par le point m d'une surface, m' l'intersection de la ligne de courbure de même espèce que mn' passant par n, avec la ligne de courbure de la seconde espèce passant par n'; R, R' les rayons de courbure de mn et mn'. L'aire $mnm'n'$ a pour expression

$$d\omega_1 = ds\, ds'.$$

Menons les normales aux points m, n, m', n' jusqu'à leur rencontre avec une surface intérieure parallèle à la proposée et qui en est distante de e. Nous déterminerons ainsi sur la seconde surface un élément superficiel qui aura pour

d'où, au même degré d'approximation,

$$h_1\, d\omega_1 = -h_2\, d\omega_2 \tag{25}$$

ce qui exprime que *les quantités d'électricité qui se trouvent sur deux éléments correspondants des surfaces des deux conducteurs doivent être égales et de signes contraires*. Ce théorème s'étend évidemment à deux portions correspondantes des deux surfaces, et, par suite, aux surfaces entières.

Si l'on néglige $\frac{e}{r}$ devant l'unité, on a simplement

$$h_1 = -h_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e}, \tag{26}$$

ce qui exprime que *la densité électrique superficielle de chaque conducteur est proportionnelle à l'excès du niveau potentiel de l'autre sur le sien propre et varie en raison inverse de la distance des deux conducteurs*.

Les considérations qui précèdent sont notamment applicables au *condensateur, au carreau de Franklin et à la bouteille de Leyde*.

Si M_1 et M_2 sont les charges des armatures (A_1), (A_2) de la bouteille de Leyde, Ω la surface de cette armature, on a

$$M_1 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e}\,\Omega = -M_2. \tag{27}$$

---

valeur

$$d\omega_2 = ds\left(\frac{R-e}{R}\right) ds'\left(\frac{R'-e}{R'}\right) = ds\, ds'\left[1 - e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{e^2}{RR'}\right],$$

d'où

$$d\omega_2 = d\omega_1\left[1 - e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{e^2}{RR'}\right].$$

Si e est assez petit pour qu'on puisse en négliger la seconde puissance, on a

$$d\omega_2 = d\omega_1\left[1 - e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right],$$

ce qui n'est autre chose que la formule (24) du texte.

Nous admettrons en principe que *lorsqu'un corps électrisé par influence se trouve en communication avec la terre, son niveau potentiel est nul.* Et, en effet, la fonction potentielle a la même valeur en un point quelconque de l'intérieur du système formé par la terre et le corps; comme il y a dans la terre autant d'électricité positive que d'électricité négative, cette valeur est nécessairement nulle. La grandeur du rayon de la Terre suffirait d'ailleurs pour justifier le principe dont il s'agit.

Si donc l'armature extérieure (A_2) de la bouteille de Leyde est en communication avec le sol, nous aurons $V_2 = 0$; sa charge sera

$$M_2 = \frac{V_1 \Omega}{4\pi e} = -M_1, \tag{28}$$

M_1 étant la charge de l'autre armature.

12. *Système formé de conducteurs dont l'un enveloppe les autres.* — Soient (A_1) le conducteur enveloppant; (A_2), (A_3), ... les autres conducteurs; M_i la charge de (A_i).

Considérons l'espace limité par les surfaces de tous les conducteurs ou plutôt par des surfaces de niveau extérieures qui en sont infiniment voisines. Pour chacun des points de cet espace l'équation (7) s'applique et l'équation (A') se réduit à

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

Mais, en remarquant que l'élément dn doit être changé de signe, puisqu'il est dirigé en sens inverse de celui qui se rapporte à la surface de (A_i) et à la surface de niveau extérieure qui en est infiniment voisine, et désignant par h la densité en un point quelconque des couches électriques, la formule (19) donne

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi h,$$

d'où

$$\int h\, d\omega = 0,$$

ou encore

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0.$$

Ainsi *la somme algébrique des charges de tous les conducteurs est nulle.*

Supposons, en particulier, que le conducteur (A_1) n'ait pas reçu de charge initiale, et qu'il ne soit ainsi électrisé que par l'influence de (A_2), (A_3), ...: en désignant par M'_1 la quantité d'électricité qui se trouve sur sa surface extérieure, nous aurons $M'_1 + M_1 = 0$, d'où, en vertu de la formule ci-dessus,

$$M'_1 = -M_1 = M_1 + M_3 + \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression de cette loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite sur un corps enveloppant est égale à la quantité inductrice.*

13. *Conducteur présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.* — Nous allons d'abord établir le lemme suivant : *Quand une surface fermée ne renferme aucune masse électrique et que sur cette surface la fonction potentielle a une valeur constante, cette fonction est également constante dans l'espace déterminé par la surface.* En effet, en un point de cet espace, l'équation (7) est satisfaite. On aura d'ailleurs $\frac{dV}{dn} = -4\pi h = 0$, puisque la surface n'est pas recouverte d'électricité et que partout $h = 0$. Une formule de Green [1] conduit au résultat suivant

$$\int \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right) du = 0,$$

---

[1] En conservant les notations du n° 8, on a

$$\int U \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) du$$
$$= \int U \frac{dV}{dn} d\omega - \int \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz} \right) du.$$

Si l'on fait $U = V$, cette formule se réduit à la suivante

$$\int V \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) du = \int V \frac{dV}{dn} - \int \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right) du,$$

qui est celle dont on fait usage dans le texte.

qui exige que V soit constant dans l'espace considéré, ce qu'il fallait établir

Revenons maintenant à notre sujet et considérons un conducteur dont la surface extérieure est électrisée, présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.

Soient V_1 la valeur constante de la fonction potentielle à la surface d'une cavité ; K la valeur de la fonction potentielle en un point O du vide; Om un rayon quelconque partant du point O et rencontrant la surface en un point m. En suivant ce rayon, la fonction potentielle variera entre K et V_1, et il y aura l'un n de ses points pour lequel la fonction potentielle aura une valeur déterminée K′ comprise entre K et V ; le lieu des points n sera une surface rentrant dans les conditions du lemme précédent et dans l'intérieur de laquelle la fonction potentielle serait égale à K′, tandis que, en O, elle est égale à K, ce qui est absurde. Ainsi, comme on ne peut pas supposer que K soit différent de V_1, il faut que la fonction potentielle dans l'intérieur de l'espace vide ait la même valeur constante qu'à sa surface.

Il résulte de là que *des cavités dans un conducteur n'ont aucune influence sur le mode de répartition de l'électricité sur sa surface extérieure et qu'il se comporte comme s'il était plein.*

14. *Théorème de Clausius* [1]. — Considérons un système composé de m corps conducteurs (A_1), (A_2), ..., (A_i), ..., (A_m) et supposons que ces corps aient reçu successivement deux charges électriques.

Soient

M_i, M'_i les quantités d'électricité qui recouvrent (A_i) lors du premier et du second chargement;

V_i, V'_i les niveaux potentiels correspondants.

Concevons l'espace limité par les surfaces des conducteurs et par celle d'une sphère d'un rayon R aussi grand que l'on voudra qui enveloppe tous les corps et dont le centre se trouve dans le voisinage de ces corps.

---

(1) *Annales de Physique et de Chimie* de G. Wiedemann, p. 493 et suiv.; 1877.

Soient

du un élément de volume de cet espace au point (x, y, z);
V, V′ les valeurs des fonctions potentielles relatives à ce point lors de la première et de la seconde charge;
$d\omega$ un élément de l'une ou de l'autre des surfaces qui limitent l'espace.

La formule (A) du n° **8** donne

$$\int V \frac{dV'}{dx} d\omega - \int V \left(\frac{d^2 V'}{dx^2} + \frac{d^2 V'}{dy^2} + \frac{d^2 V'}{dz^2} \right) du$$
$$= \int V' \frac{dV}{dx} d\omega - \int V' \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du.$$

Comme il n'y a pas d'électricité dans l'espace ci-dessus défini et que le point (x, y, z) est extérieur aux (A_i), V et V′ satisfont à l'équation (7) et la formule précédente se réduit à

$$(\alpha) \qquad \int V \frac{dV'}{dn} d\omega = \int V' \frac{dV}{dn} d\omega.$$

Considérons d'abord la portion de l'intégrale du premier membre de cette équation qui se rapporte à la sphère et prenons pour centre O de cette sphère le centre de gravité des masses M'_i; si la distance r d'un point quelconque (x, y, z) à ce centre est suffisamment grande, on a

$$V' = \frac{\Sigma M'_i}{r},$$

d'où

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{dV'}{dr} = -\frac{\Sigma M'_i}{r^2},$$

et, pour la surface de la sphère,

$$\frac{dV'}{dn} = -\frac{\Sigma M'_i}{R^2},$$

quantité égale à zéro si nous prenons $R = \infty$, ainsi qu'il nous est

permis de le supposer. Comme le même raisonnement s'applique à $\frac{dV}{dn}$, on voit que la sphère ne joue aucun rôle dans l'équation (α).

Désignons par $d\omega_i$ un élément de la surface du conducteur (A_i); V_i et V'_i étant constantes à la surface de ce corps comme dans son intérieur, l'équation (α) devient

$$(\beta)\quad V_1\int\frac{dV'}{dn}d\omega_1 + V_2\int\frac{dV'}{dn}d\omega_2 + \ldots = V'_1\int\frac{dV}{dn}d\omega_1 + V'_2\int\frac{dV}{dn}d\omega_2 + \ldots.$$

Soient h_i, h'_i les densités électriques à la surface de (A_i) qui se rapportent respectivement à la première et à la seconde charge; on a, en vertu de la formule (19) et en changeant le signe de dn, comme au n° **12**,

$$\frac{dV'}{dn} = -4\pi h'_i,\quad \frac{dV_i}{dn} = -4\pi h_i,$$

et l'équation (β) devient

$$V_1\int h'_1\,d\omega'_1 + V_2\int h'_2\,d\omega'_2 + \ldots = V'_1\int h\,d\omega_1 + V'_2\int h_2\,d\omega_2 + \ldots,$$

ou encore [1]

$$(29)\qquad V_1M'_1 + V_2M'_2 + \ldots = V'_1M_1 + V'_2M_2 + \ldots;$$

telle est la formule qui constitue le théorème de M. Clausius, et dont on déduit, comme conséquences, plusieurs autres théorèmes particuliers, auxquels divers auteurs étaient arrivés auparavant, et que nous rappellerons dans ce qui suit.

15. Supposons que le conducteur (A_i) se trouve en communication avec la terre; on a (11) $V_i = 0$.

Admettons maintenant que le corps (A_i) étant isolé n'ait point reçu de charge initiale; il ne sera électrisé que par influence, c'est-à-dire qu'il sera recouvert de deux quantités égales d'électricité de signe

---

[1] D'après M. Bertrand (*Journal de Physique* de d'Almeida, t. III, p. 73), cette formule aurait été antérieurement établie par Gauss.

contraire, de sorte que l'on a $M_i = 0$, $M'_i = 0$. De ces considérations résulte le théorème suivant :

Les corps qui, lors des deux charges, sont en communication avec la Terre ou qui sont isolés sans charge initiale ne donnent aucun terme dans l'équation (29).

16. Admettons maintenant, comme tout ce qui va suivre, que les (A_i) autres que (A_1) et (A_2) soient en communication avec la terre, ou que, étant isolés, ils ne reçoivent pas de charge initiale. L'équation (29) se réduira à la suivante

$$V_1 M'_1 + V_2 M'_2 = V'_1 M_1 + V'_2 M_2. \tag{30}$$

17. Supposons que, (A_1) et (A_2) étant isolés et non électrisés, (A_1) seul reçoive une charge que nous désignerons par E, en développant dans (A_2) le niveau potentiel V_2; puis que (A_2) reçoive la même charge en soustrayant (A_1) à toute action extérieure. Nous avons

$$M_2 = 0, \quad M'_1 = 0, \quad M_1 = M'_2 = E,$$

d'où

$$V_2 = V'_1. \tag{31}$$

Donc, *le niveau potentiel qui naît dans* (A_2), *quand* (A_1) *a été seul chargé, est égal à celui qui naît dans* (A_1) *quand on effectue l'opération inverse et que les deux charges sont égales.*

18. *Théorème de Riemann.* — Supposons que, à la première charge, le corps (A_1) se trouve au niveau potentiel K, que (A_2), mis en communication avec la terre, reçoive de ce corps par influence la quantité d'électricité M_2; puis que, à la seconde décharge, (A_2) se trouve au même niveau potentiel K, tandis que (A_1), mis en communication avec le sol, se trouve reconvert de la quantité d'électricité M'_1. Nous avons

$$V_2 = 0, \quad V'_1 = 0, \quad V_1 = V'_2 = K,$$

et la formule (30) donne

$$M'_1 = M_2. \tag{32}$$

Donc *la quantité d'électricité qui, sous l'influence de* (A_1), *s'est accumulée sur* (A_2) *mis en communication avec la Terre, et celle qui s'est accumulée sur* (A_1) *mis en relation avec la Terre, par l'influence de* (A_2), *sont égales lorsqu'il y a égalité entre les niveaux potentiels pour ces deux charges.*

§ IV. — Du travail des forces électriques. — Décharges.

19. *Expression du travail des forces électriques.* — Soient (A_1), (A_2) ..., (A_i), ... des conducteurs chargés d'électricité et réagissant les uns sur les autres.

Une modification introduite par une cause quelconque dans les intervalles intermoléculaires du fluide électrique donnera lieu à une production de travail mécanique dont la considération mérite un sérieux examen.

Désignons par r la distance de deux particules électriques, dm et dm' appartenant au système des conducteurs ci-dessus désignés. Le travail élémentaire des forces électriques a pour expression

$$d\tau = \int \frac{dm\,dm'}{r^2}\,dr = -\,d\int \frac{dm\,dm'}{r},$$

le signe de l'intégration s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des molécules électriques.

Nous désignerons sous le nom de *potentiel total* du système électrique l'expression

$$W = -\int \frac{dm\,dm'}{r},$$

de sorte que nous aurons

$$d\tau = dW.$$

En passant d'un certain état initial, que nous caractériserons par l'indice zéro, à un état quelconque, nous aurons pour le travail déve-

loppé entre les deux états

$$(1) \qquad \mathfrak{T} = W - W_0.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, si le fluide revient à l'état neutre, on aura $W = 0$, puisque toutes les masses électriques s'annuleront, et par suite

$$(2) \qquad \mathfrak{T} = -W_0.$$

Si nous désignons par V la fonction potentielle de dm relative à tous les autres éléments du système électrique, et si nous considérons l'intégrale

$$\int V dm,$$

étendue à tous les éléments dm du système total, les termes tels que $\frac{dm\,dm'}{r}$ seront reproduits deux fois, et nous devrons prendre

$$(3) \qquad W = \frac{1}{2}\int V dm$$

Si nous remarquons que, à la surface de (A_i) comme dans son intérieur, V est constant ou égal au niveau potentiel V_i, pour chacun des conducteurs V sortira de l'intégrale, et l'on voit que, en désignant par M_i la charge du conducteur ci-dessus, on aura

$$(4) \qquad W = \frac{1}{2}(M_1V_1 + M_2V_2 + M_3V_3 \ldots).$$

Si (A_i) est isolé et n'a pas reçu de charge initiale, le conducteur ne sera électrisé que par influence et renfermera, par suite, autant d'électricité positive que d'électricité négative, et l'on aura $M_i = 0$; si maintenant (A_i) est en communication avec la Terre, on a $V_i = 0$. De sorte que, dans les deux cas, (A_i) ne laissera aucune trace dans la formule (4).

20. *Décharge d'une bouteille de Leyde.* — Soient (A_1) et (A_2) l'armature intérieure et l'armature extérieure, les deux seuls conducteurs

que nous avons à considérer; comme la seconde de ces armatures est censée mise en communication avec le sol, nous devrons supposer $V_2 = 0$; les formules (4) et (2) nous donnent pour le travail effectué après la décharge

$$(5) \qquad \mathfrak{T} = -\frac{1}{2} M_1 V_1,$$

ou, en ayant égard à la formule (27) du n° **11**,

$$(6) \qquad \mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\Omega} M_1^2.$$

Ce travail, qui, pour une même bouteille, est proportionnel au carré de la charge, est employé en partie à vaincre la résistance de l'air ou celle que présente un corps non conducteur traversé par l'électricité, ce qui donne lieu à l'étincelle; l'autre partie est transformée en chaleur et correspond à la perte d'une demi-force vive, qui devra être d'autant plus grande que la vitesse du fluide sera elle-même plus grande ou que la section et la longueur du fil de communication seront plus faibles.

On explique ainsi pourquoi, toutes choses égales d'ailleurs, lorsque le fil est gros et court, l'étincelle est énergique et l'échauffement du conducteur très faible, tandis que l'inverse a lieu quand le fil est long et d'un petit diamètre.

Si l'on augmente la résistance à vaincre en interposant entre les extrémités du fil une carte ou une feuille de mica, l'étincelle est plus forte et l'échauffement plus faible, comme M. Riess l'a reconnu par l'expérience [1].

21. *Décharge d'une batterie.* — Considérons une batterie composée de n bouteilles identiques; il est évident que le travail effectué pendant la décharge s'obtiendra en multipliant les équations (5) et (6) par n, et nous aurons notamment

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\pi} n M_1^2.$$

---

[1] *Annales de Poggendorff*, t. XLV.

Si M désigne la charge totale $M_1 n$, cette expression prend la forme suivante

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\Omega} \frac{M^2}{n}, \tag{7}$$

d'où cette loi, découverte expérimentalement par M. Riess [1] : *L'énergie totale d'une batterie est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre de bouteilles.*

22. *Décharges incomplètes.* — Supposons qu'après avoir chargé la batterie ci-dessus de n bouteilles identiques on réunisse les armatures intérieures à celles d'une batterie à l'état neutre, composée de n' bouteilles semblables aux précédentes.

Le travail accumulé $\mathfrak{T}'$ dans la batterie de $n + n'$ bouteilles s'obtiendra en remplaçant n par $n + n'$ dans la formule (7), puisque la charge totale est restée la même. Nous avons donc

$$\mathfrak{T}' = \frac{2\pi e}{\Omega} \frac{M^2}{n + n'}.$$

Mais le travail emmagasiné primitivement dans la batterie de n bouteilles est fourni par la même formule (7). D'où il suit que le travail accompli dans la réunion des deux batteries a pour expression

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = \frac{2\pi e}{\Omega}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + n'}\right),$$

ou encore

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = T \frac{n'}{n + n'}, \tag{8}$$

relation à laquelle M. Riess est arrivé par l'expérience.

23. *Batteries chargées en cascades.* — Soient (A_1), (A_2), ..., (A_m) m batteries composées respectivement de n_1, n_2, ..., n_m bouteilles identiques; l'armature extérieure de la $n^{\text{ième}}$ batterie communiqué

---

[1] Plusieurs géomètres ont donné à l'expression de $\mathfrak{T}$ le nom d'*énergie potentielle*.

avec le sol, tandis que l'armature intérieure de la première est en relation avec une source dont le niveau potentiel est V_1. L'armature intérieure de la première batterie reçoit une charge M_1; sur l'armature extérieure il se développe une charge $-M_2$, tandis que la charge de l'armature intérieure de la seconde batterie est M_2, le niveau potentiel V_2 étant le même pour ces deux conducteurs, et ainsi de suite, en remarquant toutefois que $V_m = 0$. Le travail accumulé dans le système total est donc

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{2}(M_1V_1 - M_2V_2 + M_2V_2 - M_3V_3 + \ldots),$$

ou simplement

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{2}M_1V_1,$$

comme on devait le prévoir d'après une remarque faite à la fin du n° **19**.

Si nous posons $\lambda = \frac{4\pi e}{\Omega}$, la formule (27) du n° **11** donne

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -\lambda\frac{M_1}{n_1}, \\ V_2 - V_3 &= -\lambda\frac{M_2}{n_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_m - 0 &= -\lambda\frac{M_m}{n_m}, \end{aligned}$$

en remarquant que la charge de chaque bouteille de (A_i) est $\frac{M_i}{n_i}$. On déduit de là

$$V_1 = -\lambda\left(\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \cdots\right),$$

et enfin

$$(9) \qquad \mathfrak{T} = \frac{\lambda}{2}M_1\left(\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \cdots\right).$$

Si les bouteilles sont parfaitement fermées, les charges des deux arma-

tures de chacune d'elles sont égales, ou

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots;$$

par suite,

$$\mathfrak{T} = \frac{\lambda}{2} M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots \right).$$

Dans le cas de deux batteries seulement, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \lambda M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right),$$

résultat auquel M. Riess est arrivé par l'expérience.

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle;

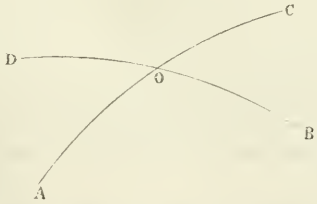
PAR M. H. POINCARÉ [1],
Ingénieur des Mines.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Convention fondamentale. — Considérons une *demi-caractéristique* quelconque; nous la prolongerons indéfiniment, si on peut le faire sans rencontrer un point singulier; si, au contraire, en suivant la demi-caractéristique, nous arrivons à un nœud, nous l'arrêterons à un nœud; si nous arrivons à un col, trois chemins s'ouvriront devant

Fig. 6.



nous quand nous voudrons continuer à suivre la caractéristique, le

[1] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VII, p. 375.

premier dans le prolongement du chemin suivi jusqu'alors, les deux autres à droite et à gauche; nous conviendrons de suivre l'un des chemins de droite ou de gauche, sans *jamais* prendre celui qui est directement devant nous. Par exemple, nous considérerons OB ou OD (*fig.* 6) et non pas OC, comme le prolongement de AO. De cette façon, on peut dire que dans le voisinage d'un col il y a quatre caractéristiques collées l'une contre l'autre, et ayant deux à deux une branche commune : ce sont les caractéristiques AOB, BOC, COD, DOA.

Définition des conséquents. — Soit

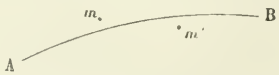
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact; φ et ψ sont des fonctions algébriques de t, et n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de t. Les extrémités de l'arc correspondront aux valeurs de t,

$$t = \alpha, \quad t = \beta.$$

Un pareil arc, sans contact, aura deux côtés que nous appellerons sa droite et sa gauche; un point *infiniment voisin de l'arc* AB pourra, en effet, être à droite ou à gauche de cet arc. Par exemple, le point m sera à gauche de l'arc AB (*fig.* 7), le point m' à droite de l'arc AB,

Fig. 7.



parce qu'on ne peut passer de l'un à l'autre sans traverser l'arc AB, ou sans s'éloigner de cet arc à une distance finie, ou sans passer dans un cercle de rayon infiniment petit tracé avec A ou avec B comme centre.

Ceci posé, considérons un point quelconque M_0 de l'arc AB (*fig.* 8); de ce point partent deux *demi-caractéristiques*, l'une vers la gauche, l'autre vers la droite de l'arc AB; considérons celle de gauche.

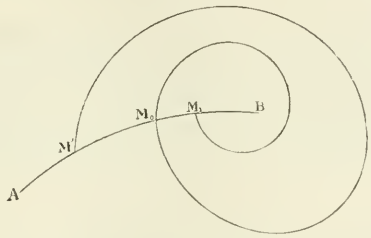
Il pourra se présenter plusieurs cas :

1° Cette demi-caractéristique peut se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre de nouveau l'arc AB.

2° Cette demi-caractéristique finit en tournant autour d'un foyer, avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

3° Elle aboutit à un nœud où nous devons l'arrêter, d'après la con-

Fig. 8.



vention fondamentale, et cela avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

Dans ces trois premiers cas, nous dirons que *le point* M_0 *n'a pas de conséquent.*

4° La demi-caractéristique vient rencontrer l'arc AB en M_1 avant d'avoir passé par un point singulier. Nous dirons alors que *le point* M_1 *est le conséquent du point* M_0.

5° La demi-caractéristique aboutit à un col avant d'être arrivée à rencontrer de nouveau l'arc AB. Dans ce cas, d'après la convention fondamentale, il faut tourner soit à droite, soit à gauche, et chacun de ces deux chemins peut nous conduire ou ne pas nous conduire à rencontrer de nouveau l'arc AB. Le point M_0 peut alors avoir 0, 1 ou 2 conséquents.

Il peut enfin arriver que la demi-caractéristique rencontre deux cols ou plus encore, et dans ce cas le point M_0 pourrait avoir plus de deux conséquents.

Si, en partant du point M_0, au lieu de considérer la demi-caractéristique de gauche, on avait envisagé celle de droite, on aurait pu arriver à un point M' situé sur l'arc AB.

Ce point M' *s'appellera l'antécédent du point* M_0.

Dans ces conditions, le point M_0 sera lui-même l'antécédent de son conséquent M_1.

Si t_0 et t_1 sont des valeurs de t qui correspondent à M_0 et à M_1, *la loi de conséquence* sera la relation qui lie t_0 à t_1.

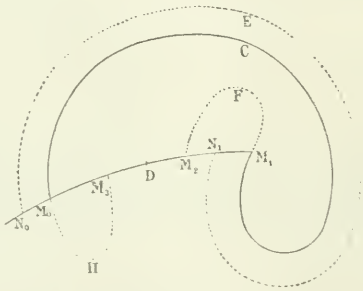
THÉORÈME XI. — *Si $t_0 = t_1$, la caractéristique est un cycle.*
Si $t_0 \neq t_1$, la caractéristique est une spirale.

En effet, la première partie de l'énoncé est une véritable tautologie. La seconde se démontre aisément de la manière suivante :

Remarquons d'abord que l'arc M_0DM_1 (*fig.* 9) *surtend* l'arc M_0CM_1 de la caractéristique, car il est *sans contact*.

De plus, cet arc M_0DM_1 ne peut rencontrer la caractéristique en

Fig. 9.



aucun autre point que M_0 et M_1. Car des arcs tels que M_1FM_2, M_0HM_3 seraient *sous-tendus* par les arcs M_1M_2, M_0M_3, ce qui est impossible, puisque ces arcs sont supposés *sans contact*.

Ceci posé, par le point N_0 infiniment voisin de M_0 et à gauche de ce dernier, on pourra mener un arc de caractéristique N_0EN_1 qui viendra rencontrer l'arc M_0M_1 en un point N_1 infiniment voisin de M_1 et à gauche de ce dernier, car il ne pourrait passer à droite sans couper la caractéristique M_0CM_1, ce qui est impossible.

Le cycle $N_1M_0N_0EN_1$ ne rencontre donc la caractéristique M_0CM_1 qu'en un seul point qui est M_0. Donc, cette caractéristique est une spirale. C. Q. F. D.

THÉORÈME XII. — *Toute caractéristique qui n'aboutit pas à un nœud est un cycle ou une spirale.*

En effet, si cette caractéristique ne rencontre aucun cycle algébrique en une infinité de points, elle est un cycle, en vertu du théorème I.

Si, au contraire, elle rencontre un cycle algébrique en une infinité de points, comme ce cycle se compose d'un nombre fini d'arcs sans contact, elle rencontrera l'un de ces arcs, et au contact en plus d'un point, c'est-à-dire que l'un des points d'intersection aura un conséquent.

S'il se confond avec son conséquent, la caractéristique est un cycle; s'il ne se confond pas avec son conséquent, la caractéristique est une spirale, en vertu du théorème XI.

Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME XIII. — *Si* M_0 *ne correspond pas à une caractéristique passant par un col, et s'il a un conséquent* M_1; *si* $t_1 = \varphi_1(t_0)$ *est la loi de conséquence, la fonction* φ_1 *est holomorphe pour les valeurs de* t_0 *voisines de celle qui correspond à* M_0.

En effet, nous avons supposé au début que si

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

sont les équations de l'arc sans contact, φ et ψ sont des fonctions holomorphes de t dans le voisinage de la valeur de t qui correspond à M_0, et aussi de celle qui correspond à M_1.

Supposons que l'on cherche une intégrale de l'équation aux différences partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = 0,$$

qui soit assujettie à se réduire identiquement à t_0, quand on y fait

$$x = \varphi(t_0), \quad y = \psi(t_0).$$

Cette intégrale représente une surface qui passe par la courbe

gauche,

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z).$$

Dans le voisinage du point M_0, cette intégrale est holomorphe en x et en y; car l'arc

$$x = \varphi(t_0), \quad y = \psi(t_0)$$

ne touche pas une caractéristique.

Elle sera de même holomorphe en x et en y tout le long de la caractéristique qui passe par le point M_0, à moins que cette caractéristique ne passe par un point singulier. Or, nous avons supposé que cette caractéristique allait passer par le point M_1 sans avoir rencontré aucun point singulier. Dans le voisinage du point M_1, z est donc fonction holomorphe de x et de y; et, si l'on y fait

$$x = \varphi(t_1), \quad y = \psi(t_1),$$

z devient fonction holomorphe de t_1 dans le voisinage de la valeur de t_1, qui correspond à M_1.

Or, z n'est autre chose que t_0. Donc, t_0 est fonction holomorphe de t_1. On démontrerait identiquement, de la même manière, que t_1 est fonction holomorphe de t_0 dans le voisinage de t_0 qui correspond à M_0.

Corollaire I. — La fonction $t_1 = \varphi_1(t_0)$, qui exprime la loi de conséquence, ne peut offrir de discontinuité que pour les valeurs de t_0 qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire II. — Si l'on divise l'arc sans contact AB en arcs partiels, tels que tous les points de chacun de ces arcs aient un conséquent, ou qu'aucun n'en ait, les extrémités de ces arcs partiels seront des points ayant pour conséquent une extrémité de l'arc sans contact AB, ou correspondant à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire III. — Si les extrémités de l'arc sans contact correspondent aux valeurs

$$t = \alpha, \quad t = \beta;$$

Si, pour aucune valeur de t telle que

$$\alpha < t < \beta,$$

la caractéristique correspondante ne passe pas par un col;

Si, pour toutes les valeurs de t, telles que (α_1 et β_1 étant des constantes données), on ait

$$\alpha < \alpha_1 < t < \beta_1 < \beta,$$

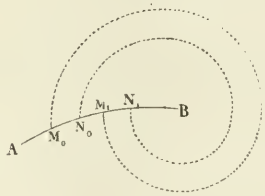
la caractéristique correspondante est un cycle.

Les caractéristiques qui correspondent à une valeur *quelconque* de t comprise entre α et β sont *toutes* des cycles.

THÉORÈME XIV. — *La valeur de* $\frac{dt_1}{dt_0}$ *est toujours positive.*

En effet, soit AB l'arc sans contact (*fig.* 11), soit M_0M_1 une caractéristique, soit N_0 un point infiniment voisin de M_0 et situé à droite de

Fig. 10.



ce point. Soit N_0N_1 la caractéristique qui passe par ce point. Le point N_1 est infiniment voisin de M_1; je dis qu'il est à droite de ce point. Car, pour qu'il fût à gauche, il faudrait que la caractéristique N_0N_1 sortît du cycle $M_0HM_1N_0M_0$ quand on la prolonge au delà de N_1, c'est-à-dire que l'arc de caractéristique N_0N_1 fût sous-tendu par l'arc N_0N_1, ce qui est impossible, puisque cet arc est sans contact.

Étude de la courbe de conséquence. — Si l'on considère les quantités t_0 et t_1 comme les coordonnées d'un point, la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

représente une courbe. Cette courbe est comprise tout entière dans le carré

$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta.$$

Premier cas. — A aucune valeur de t comprise entre α et β ne correspond de caractéristique allant passer par un col.

Dans ce cas, la courbe de conséquence est continue; elle ne rencontre qu'en un point les parallèles aux axes; en suivant la courbe dans un certain sens convenable, on va constamment en s'éloignant des deux axes.

C'est dire que si KLCD est le carré (*fig.* 11),

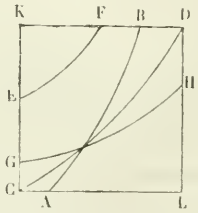
$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta,$$

la courbe présente des formes telles que

AB, CD, EF, GH.

Elle représentera la forme CD quand les valeurs α et β de t_0 corres-

Fig. 11.



pondront à des cycles, pendant qu'aucune valeur de t_0 comprise entre α et β ne correspondra à un cycle.

Deuxième cas. — Supposons qu'à certaines valeurs de γ_0, γ_0, ... de t_0 comprise entre α et β correspondent des caractéristiques allant passer par un col;

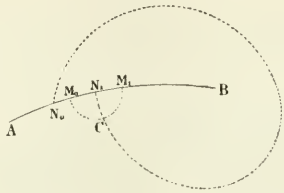
Que de plus aux valeurs α et β correspondent des cycles; qu'à aucune valeur intermédiaire ne corresponde un cycle :

De tous les cols partent quatre branches de caractéristiques; certaines de ces branches viennent rencontrer l'arc sans contact donné; d'autres ne le font pas.

Supposons d'abord que toutes celles de ces branches qui viennent rencontrer l'arc sans contact donné partent d'un seul et même col :

1° Il est impossible que les quatre branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact. Soit, en effet, AB (*fig.* 12) l'arc

Fig. 12.



sans contact donné. Soit C le col donné; soient CM_0, CM_1, CN_0, CN_1 les quatre branches de caractéristiques qui partent de ce col, de telle façon que M_1CM_0, N_1CN_0 ne forment pas de point anguleux.

D'après le théorème X, remarque I, la portion M_0M_1 de l'arc AB sous-tend la caractéristique M_0CM_1.

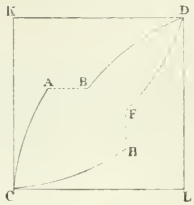
Les deux arcs AM_0, M_1B sont donc d'un même côté du cycle M_0M_1C; appelons ce côté du cycle l'*extérieur du cycle*. Les deux branches de courbe CN_0, CN_1 sont l'une à l'extérieur, l'autre à l'intérieur du cycle M_0M_1C. Soit CN_1 celle qui est à l'intérieur; elle ne pourrait rencontrer l'arc AB qu'entre M_0 et M_1, et du même côté que les branches de courbe CM_0, CM_1, de telle sorte que l'arc algébrique M_1N_1 sous tendrait l'arc de caractéristique M_1CN_1, ce qui est impossible d'après le théorème X.

Remarque I. — L'hypothèse que nous avons faite en commençant est donc absurde. C. Q. F. D.

2° Il peut se faire que trois des branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact. Dans ce cas, ou bien il y a un

point qui a deux conséquents et les points situés entre ces deux conséquents n'ont pas d'antécédent ; ou bien il y a un point qui a deux

Fig. 13.



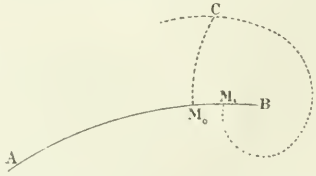
antécédents, et les points situés entre ces deux antécédents n'ont pas de conséquent.

De telle façon que la courbe de conséquence affecte soit la forme CHFD, soit la forme CABD (*fig.* 13).

3° Il ne peut se faire que deux ou une seulement des branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact.

En effet, supposons d'abord qu'il y ait deux branches de caractéristiques CM_0 et CM_1 qui rencontrent AB, et que M_0CM_1 (*fig.* 14) présente un point anguleux en C. Un point infiniment voisin de M_0 aura

Fig. 14.



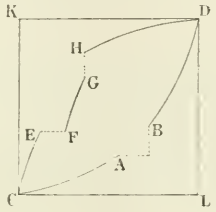
un conséquent s'il est à droite de M_0, et n'en aura pas s'il est à gauche. Donc, d'après le corollaire II du théorème XIII, les points de l'arc MOA n'auront donc pas de conséquent. Un point infiniment voisin de A n'aurait donc pas de conséquent, ce qui est absurde, puisque A est son propre conséquent. De même, si l'on supposait que M_1CM_0 ne présente pas de point anguleux, ou que CM_1 ne rencontre pas l'arc AB, on arriverait à ce résultat absurde qu'un point infiniment voisin de A

n'a pas de conséquent. Les hypothèses faites au début sont donc également absurdes. C. Q. F. D.

Nous n'examinerons pas en détail les cas où les branches de caractéristiques qui viennent rencontrer l'arc sans contact sont issues de plusieurs cols différents. La discussion se ferait d'après les mêmes principes, elle serait seulement plus longue. Citons seulement quelques exemples de combinaisons possibles.

1° *Courbe* CABD (*fig.* 15). — L'arc sans contact est rencontré par deux branches de caractéristiques issues d'un premier col λ et par

Fig. 15.



deux branches issues d'un second col μ. Ces deux systèmes de deux branches de caractéristiques présentent chacun un point anguleux, l'un en λ, l'autre en μ.

Si l'on fait varier t_0 depuis α jusqu'à la valeur qui correspond au point A et à la caractéristique qui passe en λ, on a un conséquent; ensuite t_0 variant depuis la valeur qui correspond au point A jusqu'à celle qui correspond au point B et à la caractéristique qui passe en μ, on n'a plus de conséquent; et l'on en a un de nouveau, quand t_0 varie depuis la valeur qui correspond à B jusqu'à β.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES CYCLES LIMITES.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les caractéristiques peuvent se diviser en quatre catégories :

1° Les cycles ;

2° Les spirales que l'on peut suivre indéfiniment dans les deux sens sans aboutir à un nœud ou sans tourner autour d'un foyer, et sans revenir au point de départ ;

3° Les caractéristiques que l'on peut suivre indéfiniment dans un sens sans rencontrer un nœud ou se rapprocher d'un foyer, mais qui, dans l'autre sens, aboutissent à un nœud ou se rapprochent infiniment d'un foyer ;

4° Celles qui aboutissent de part et d'autre à un nœud ou à un foyer.

D'après les mêmes principes, les *demi-caractéristiques* se divisent en quatre catégories :

1° Les cycles ;

2° Les demi-spirales que l'on suit sur un arc infini sans arriver à un nœud ou à un foyer et sans revenir au point de départ ;

3° Les demi-caractéristiques qui aboutissent à un nœud ;

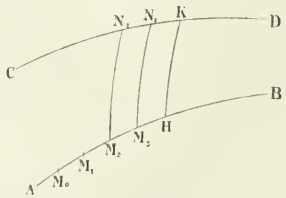
4° Celles qui tournent indéfiniment autour d'un foyer.

D'après le théorème I, les demi-caractéristiques de la seconde catégorie rencontrent certains cycles algébriques, et par conséquent certains arcs algébriques sans contact en une infinité de points.

Soit AB un de ces arcs algébriques sans contact.

Soit M_0 (*fig.* 16) le point d'où est issue la demi-caractéristique con-

Fig. 16.



sidérée. Soit M_1 le conséquent de M_0, et supposons que M_1 soit à droite de M_0.

Soit M_2 le conséquent de M_1, M_3 celui de M_2, etc.; M_2 sera à droite de M_1, M_3 sera à droite de M_2, etc.

En général, M_{n+1} sera à droite de M_n, et comme, quelque grand que

soit n, M_n est toujours sur l'arc AB, M_n tendra vers une limite quand n augmentera indéfiniment. Soit H cette limite.

Le conséquent de M_n, quand n est infiniment grand, est infiniment rapproché de M_n. Donc H est son propre conséquent; donc la caractéristique qui passe par H est un cycle; nous l'appellerons *cycle limite* de la demi-caractéristique donnée. On peut suivre sur la caractéristique qui passe par M_0 un arc assez grand pour se rapprocher autant que l'on veut du point H

Soit HK un arc de la caractéristique qui passe par le point H. Soit CD un arc algébrique passant par K.

On pourra prendre n assez grand pour que l'arc de caractéristique issu de M_n aille rencontrer CD.

Supposons, par exemple, que l'arc issu de M_2 aille rencontrer CD en N_2. L'arc issu de M_3 ira rencontrer CD en N_3, ... l'arc issu de M_n en un point N_n.

N_3 sera à droite de N_2, ..., N_{n+1} sera à droite de N_n. De sorte que la demi-caractéristique donnée rencontrera CD en une infinité de points N_2, N_3, ..., N_n, et que N_n tendra vers K quand n augmentera indéfiniment.

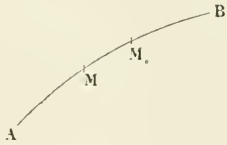
En résumé, toute demi-caractéristique de la seconde catégorie a un cycle limite.

Tout arc algébrique, si petit qu'il soit, qui coupe ce cycle, coupe la demi-caractéristique en une infinité de points.

On peut trouver un point de la demi-caractéristique qui soit aussi rapproché qu'on voudra d'un point quelconque de son cycle limite.

Soit AB (*fig.* 17) un arc algébrique sans contact. Supposons qu'à au-

Fig. 17.

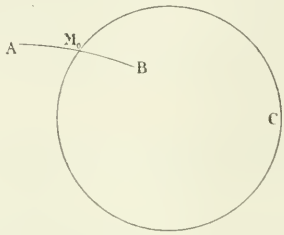


cun point M situé entre A et B ne corresponde une caractéristique allant passer par un col; qu'au point M_0 corresponde un cycle limite, et qu'à

aucun point M différent de M_0 situé entre A et B ne corresponde un cycle limite. Toute caractéristique qui rencontre AB aura pour cycle limite le cycle qui passe par M_0.

Si l'on considère un cycle limite C (*fig.* 18) qui ne passe pas par un col et qui passe par un point M_0, on pourra mener par M_0 un arc algébrique AB assez petit pour qu'il soit sans contact; pour qu'entre A et M_0

Fig. 18.



on entre M_0 et B il n'y ait aucun point auquel corresponde une caractéristique passant par un col ou un cycle limite. Toutes les caractéristiques qui rencontrent AB ont alors C pour cycle limite, de sorte que C est le cycle limite de deux séries de caractéristiques situées l'une à l'intérieur du cycle, l'autre à l'extérieur.

Voyons ce qui se passe quand C va passer par un col.

Soient H le col, HA, HB, HC, HD les quatre branches de caractéristiques issues de ce col. Supposons que deux de ces branches, HA et HB, par exemple, aillent aboutir à un même point M, de façon à former un cycle HAMBH; ce cycle sera toujours cycle limite de courbes telles que $\alpha\alpha$: l'inspection de la figure le démontre (*fig.* 19).

Considérons, au contraire, la courbe $\beta\beta$; il est aisé de voir que, si les branches de courbe HC, HD ne vont pas aboutir en un même point N, le cycle HAMBH n'est pas cycle limite de $\beta\beta$.

Si, au contraire, HC et HD vont se réunir en N, $\beta\beta$ a pour cycle limite le polycycle

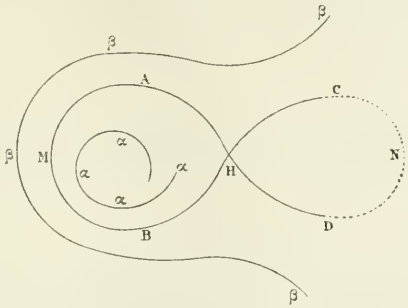
HAMBHDNCH.

Théorème XV. — *A l'intérieur et à l'extérieur d'un cycle limite quelconque, il y a toujours au moins un foyer ou un nœud.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons appeler *tangences d'un cycle* les points où il touche un des grands cercles $x = \text{const}$.

Les tangences seront directes si, dans le voisinage du point de

Fig. 19.



contact, le grand cercle tangent reste à l'extérieur du cycle. Elles seront inverses dans le cas contraire.

Nous démontrerons ensuite les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Si les points d'intersection de l'équateur avec le grand cercle $x = 0$, points que nous appellerons m, m', sont tous deux à l'extérieur d'un cycle, l'excès du nombre des tangences directes de ce cycle sur le nombre de ses tangences inverses est de* 2.

Si les points m, m' sont tous deux à l'intérieur du cycle, cet excès est de -2.

Si les points m, m' sont l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur, cet excès est de 0.

En effet, on peut passer d'un cycle quelconque A à un autre cycle également quelconque B par voie de déformation continue, c'est-à-dire en passant du cycle A à un cycle qui en diffère infiniment peu, A′, et ensuite, par une série de cycles C infiniment peu différents les uns des autres, on arrivera à un cycle B′, infiniment peu différent de B.

Dans ces déformations successives, une tangence directe ne se transformera jamais en une tangence inverse, ni une tangence inverse en une

tangence directe, car cela ne pourrait avoir lieu que si l'un des grands cercles $x = \text{const.}$ devenait osculateur à l'un des cycles; dans ce cas, ce serait que deux tangences, l'une directe et l'autre inverse, seraient venues à se confondre, et, dans ce cas, elles disparaîtraient en général pour un des cycles infiniment voisins de C.

L'excès qu'il s'agit d'évaluer dans ce lemme ne peut se modifier dans ces déformations continues du cycle que si deux des tangences viennent à se confondre, puis à disparaître. Or cela peut arriver dans deux cas :

1° Quand l'un des cycles C vient à passer par l'un des points m, m'; mais nous supposerons : 1° que les points m, m' sont tous deux à l'intérieur de A et tous deux à l'extérieur de B; 2° ou que les points m, m' sont tous deux à l'extérieur de A et à l'extérieur de B; 3° ou que m soit à l'extérieur de A et de B pendant que m' est à l'intérieur de ces deux cycles, et, par conséquent, on aura pu toujours choisir la série des cycles C qui permettent de passer du cycle A au cycle B, de telle sorte qu'aucun des cycles C ne passe ni par m, ni par m'.

2° Cela peut arriver encore si l'un des cycles C devient osculateur à l'un des cercles $x = \text{const.}$ Mais, dans ce cas, c'est une tangence directe et une tangence inverse qui se confondent et disparaissent. L'excès à évaluer n'est donc pas modifié.

Donc cet excès est le même pour A et pour B.

Mais supposons que A soit un cycle convexe quelconque, et B le cycle donné.

L'excès en question sera de 2 pour A si m et m' sont à l'extérieur de A; il sera de -2 s'ils sont tous à l'intérieur, et 0 s'ils sont l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur.

L'excès en question sera donc, pour B, de 2; de -2 et de 0 dans les mêmes conditions.

Le lemme est donc démontré.

Lemme II. — *Si l'on parcourt un cycle de manière à avoir toujours l'intérieur à sa gauche et que l'on observe les variations du coefficient angulaire* $\frac{dy}{dx}$, *on observera qu'à chaque tangence directe,* $\lambda\frac{dy}{dx}$ *sautera de* $+\infty$ *à* $-\infty$ *si l'on est dans le premier hémisphère, et de* $-\infty$ *à* $+\infty$

si l'on est dans le second hémisphère, et que c'est le contraire pour les tangences inverses.

Démonstration du théorème. — Supposons d'abord que le cycle limite considéré soit tel que les deux points m et m' soient d'un même côté de ce cycle, côté que nous appellerons l'*extérieur du cycle*.

Soient

ν le nombre des nœuds et des foyers contenus à l'intérieur du cycle;
ν' le nombre des nœuds et des foyers situés à l'extérieur du cycle;
γ et γ' le nombre des cols situés à l'intérieur et à l'extérieur de ce cycle.

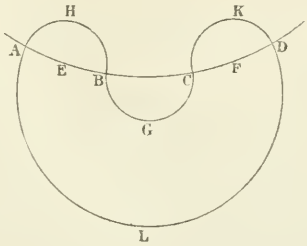
On a

$$\nu + \nu' - \gamma - \gamma' = 2.$$

Le cycle coupe l'équateur en un certain nombre de points, de telle façon qu'on peut le partager en un certain nombre de cycles secondaires situés les uns tout entiers dans le premier hémisphère, les autres tout entiers dans le second hémisphère, et formés à l'aide d'arcs du cycle primitif et d'arcs de l'équateur.

Supposons, pour fixer les idées, que le cycle donné soit le cycle

Fig. 20.



AHBGCKDLA, qui coupe l'équateur aux points A, B, C, D (*fig.* 20). Le cycle se décompose en trois cycles secondaires :

AEBHA, CFDKC, CGBEALDFC.

Or, d'après le théorème IV, on a

$$-(\nu - \gamma) = \text{ind. AEBHA} + \text{ind. CFDKC} + \text{ind. CGBEALDFC}.$$

Soient, maintenant, α, α', α'', α''' le nombre des tangences directes des arcs AHB, CKB, CKB, CGH, ALD ; β, β', β'', β''' le nombre de leurs tangences inverses; soient λ et λ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; μ et μ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; on a, en vertu du lemme II et en remarquant que tout le long du cycle donné on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

$$2\,\text{ind. AEBHA} = -\alpha + \lambda - \mu + \beta,$$

$$2\,\text{ind. CFDKC} = -\alpha' + \lambda' - \mu' + \beta',$$

$$2\,\text{ind. CGBEAL} = -\alpha'' - \alpha''' + \beta'' + \beta''' - \lambda - \lambda' + \mu + \mu',$$

d'où

$$-(2\nu - 2\gamma) = \beta + \beta' + \beta'' + \beta''' - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''',$$

ou, d'après le lemme I,

$$-(2\nu - 2\gamma) = -2, \quad \nu - \gamma = 1.$$

On a donc aussi

$$\nu' - \gamma' = 1,$$

d'où

$$\nu > 0, \quad \nu' > 0. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Dans les cas où les points m, m' sont de part et d'autre du cycle, la difficulté est facile à tourner. En effet, on trouvera toujours sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, et il suffira d'un changement de variables pour retomber sur le cas précédent.

Si l'on ne trouve pas sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, c'est que les points du cycle

sont deux à deux diamétralement opposés, c'est-à-dire que le cycle est symétrique à lui-même par rapport au centre de la sphère, et alors le théorème est évident par lui-même.

THÉORÈME XVI. — *Un cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre tous les cycles limites.*

En effet, soit un cycle limite C quelconque; il contient certains nœuds et certains foyers à son intérieur, certains nœuds et certains foyers à l'extérieur.

Il y a donc des points du cycle algébrique donné qui sont à l'extérieur de C, et d'autres qui sont à l'intérieur, c'est-à-dire que le cycle algébrique donné rencontre C. C. Q. F. D.

Corollaire. — Tout cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre toutes les caractéristiques.

THÉORÈME XVII. — *Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col.*

En effet, faisons passer un cycle algébrique C par tous les nœuds et par tous les foyers. Soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de ce cycle C.

Ce cycle C, rencontrant tous les cycles limites, aurait une infinité de points d'intersection avec ces cycles limites, si ceux-ci étaient en nombre infini. Il y aurait donc un point de ce cycle C autour duquel ces points d'intersection seraient infiniment rapprochés, c'est-à-dire que si

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

est la loi de conséquence d'un certain arc sans contact du cycle C, il y aura une certaine valeur τ de t_0, telle que, t_0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$, t_1 devienne un nombre infini de fois égal à t_0.

Mais, si τ ne correspond pas à une caractéristique passant par un

col, $\varphi_1(t_0)$ est holomorphe pour $t_0 = \tau$, et on ne peut donc avoir une infinité de fois (t^0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$)

$$t_0 = \varphi_1(t_0).$$

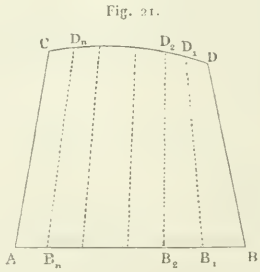
Cela ne peut arriver non plus si τ ne correspond pas à un cycle limite.

Donc on ne peut avoir une infinité de cycles limites que si l'un d'eux va passer par un col.

Théorie des anneaux limites. — Soit encore un cycle algébrique C passant par tous les nœuds et par tous les foyers. On peut y découper un certain nombre d'arcs sans contact contenant tous les points qui correspondent à des cycles limites et ne contenant aucun des points qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Soit $t_1 = \varphi(t_0)$ la loi de conséquence de l'un de ces arcs, et supposons que l'on fasse varier t_0 depuis α jusqu'à β; que les points $t_0 = \alpha$,

Fig. 21.



$t_0 = \beta$ aient deux conséquents $t_1 = \alpha'$, $t_1 = \beta'$. Soit A_1 le point de l'arc sans contact qui correspond à $t_0 = \tau$. Supposons que l'on considère le point de la sphère qui se trouve sur la caractéristique qui passe par A, et qui est séparé de A_1 par un arc s de caractéristique, et qu'on fasse correspondre à ce point un point du plan qui ait pour coordonnées s et τ (*fig.* 21).

A l'arc sans contact correspondront :

1° Le segment de la droite $s = 0$ compris entre les points

$$\tau = \alpha, \quad \tau = \beta, \quad \text{soit AB } (\textit{fig. } 0);$$

2° Un certain arc de courbe CD, défini par l'équation

$$s = \lambda(\tau),$$

$\lambda(\tau)$ étant la longueur de la caractéristique passant par A_1 qu'il faut parcourir avant de rencontrer de nouveau l'arc sans contact.

Un point quelconque de l'arc sans contact sera représenté par un point B_i du segment AB et par un point D_i de l'arc CD. Tout arc de courbe allant de D_i à B_i représente un cycle; ce cycle sera sans contact si l'arc de courbe D_iB_i n'est tangent à aucune des droites $\tau = \text{const.}$

Or il est clair qu'on peut joindre par des droites A et C, E et D, puis sillonner le quadrilatère mixtiligne ABCD par des arcs de courbe qui ne sont tangents à aucune des droites $\tau = \text{const.}$ et qui ne se coupent en aucun point.

Conséquence. — Autour d'un cycle limite quelconque se trouve une région annulaire qui est limitée par deux cycles sans contact que nous appellerons *cycles frontières*, et qui est sillonnée de cycles sans contact qui ne se coupent en aucun point.

Ces régions annulaires s'appelleront *anneaux limites* et seront en nombre fini.

Autour des nœuds et des foyers, on peut également tracer une série de cycles sans contact s'enveloppant mutuellement, de sorte que les nœuds et les foyers ont aussi leurs anneaux limites.

Nous avons implicitement supposé qu'aucun cycle limite ne passait par un col, car nous avons envisagé sur le cycle algébrique C des arcs sur lesquels se trouvaient tous les points auxquels correspondent des cycles limites, et ne se trouvait aucun des points auxquels correspondent des caractéristiques passant par des cols.

Supposons maintenant qu'un cycle limite aille passer par un col; nous savons que deux cas peuvent se présenter :

1° Une pareille caractéristique n'est cycle limite que des caractéristiques qui lui sont suffisamment voisines et qui sont situées à l'inté-

rieur du cycle (voir *fig.* 15). Dans ce cas, on découpera sur le cycle C un arc sans contact, limité au point qui correspond au cycle limite qui passe par un col, et ne contenant aucun autre point correspondant à une caractéristique passant par un col et, raisonnant comme dans le cas général, on fera voir que le cycle qui passe par un col a également un anneau limite, mais dont il est lui-même le cycle frontière.

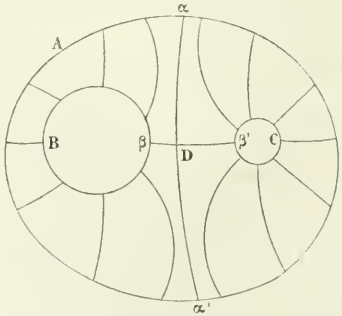
2° Les cycles HAMBH, HCNDH (*fig.* 15) sont cycles limites des caractéristiques situées à l'intérieur de ces cycles pendant que le polycycle HAMBHDNCH est cycle limite des caractéristiques extérieures.

Raisonnant comme dans le premier cas particulier, on verrait que chacun de ces trois cycles a un anneau limite, dont il est lui-même le cycle frontière; de sorte que ces trois anneaux limites forment par leur juxtaposition une seule région annulaire.

Régions interannulaires. — Les cycles frontières divisent la sphère en deux catégories de régions : 1° les anneaux limites que nous venons d'étudier; 2° les régions interannulaires.

Un mobile parcourant une caractéristique d'une vitesse uniforme et partant d'un point situé dans une région interannulaire ira, après un

Fig. 22.



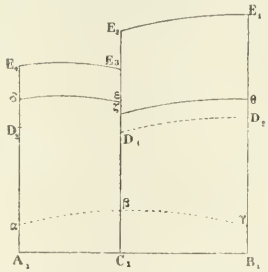
temps fini, traverser un cycle frontière pour passer dans un anneau limite.

Car les régions interannulaires ne contiennent ni nœud, ni foyer, ni aucun point des cycles limites.

Je dis que les régions interannulaires sont, comme les anneaux limites, sillonnées par des cycles sans contact. En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'une région interannulaire soit limitée par trois cycles frontières A, B, C et divisée en deux parties, sillonnées, la première par des caractéristiques allant de A en B, la seconde par des caractéristiques allant de A en C. Les deux parties de la région devront être séparées par une caractéristique allant passer par un col D (*fig.* 22). Soient αD, $\alpha' D$, βD, $\beta' D$ les quatre branches de caractéristiques issues de D.

Soit τ un paramètre quelconque définissant un point λ_1 du cycle A. Soient (x, y) un point d'une caractéristique issue de λ_1, et s l'arc de caractéristique qui sépare (x, y) de λ_1. Représentons le point de la sphère (x, y) par le point du plan dont les coordonnées sont s et τ. La droite $A_1 C_1 B_1$ $(s = 0)$ (*fig.* 23) représentera le cycle A; A_1 et B_1 représente-

Fig. 23.



ront le point α; C_1 représentera le point α'; les arcs E_4E_3, E_2E_1 représenteront respectivement les cycles B et C; D_1, D_2, D_3 représenteront le point D; E_4 et E_3 représenteront β; E_2 et E_1 représenteront β'. D'ailleurs on aura

$$E_4D_3 = E_3D_1, \quad E_2D_1 = E_1D_2, \quad A_1D_3 = B_1D_2.$$

Les arcs de courbe $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$, où l'on a

$$\begin{aligned} A_1\alpha &< A_1D_3, & C_1\beta &< D_1C_1, & A_1\alpha &= B_1\gamma, \\ & & \varepsilon C_1 &> E_1C_1, & \varepsilon D_1 &= \delta D_3, \\ & & \zeta C_1 &> D_1C_1, & \theta D_2 &= \zeta D_1. \end{aligned}$$

représentent des cycles, et ces cycles seront sans contact si les arcs $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$ n'ont pas de tangente parallèle à l'axe des s. Or il est clair qu'on peut sillonner le polygone mixtiligne $A_1B_1E_1E_2E_3E_4$ d'arcs satisfaisant à cette condition. Donc on peut sillonner la région interannulaire de cycles sans contact, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XVIII. — *Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et ses sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée.*

La connaissance de ce système topographique permet de discuter complètement les formes affectées par les courbes que définit l'équation différentielle donnée. On le comprendra mieux, d'ailleurs, par les exemples qui vont suivre.

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS COMPLÈTES.

Premier exemple. — Soit (*fig.* 24) l'équation

$$\frac{dy}{xy-1} = \frac{dx}{1-x^2-y^2}.$$

On peut remarquer d'abord que les courbes $X = 0$, $Y = 0$, qui sont l'une $xy = 1$, l'autre $x^2 + y^2 = 1$, ne se coupent en aucun point ni en dehors de l'équateur ni sur l'équateur

Si de plus X_2 et Y_2 sont les termes du second degré de X et de Y, on a

$$X_2 = -(x^2 + y^2), \quad Y_2 = xy$$

$$xY_2 - yX_2 = y(2x^2 + y^2).$$

L'expression $xY_2 - yX_2$ ne s'annule que pour $y = 0$

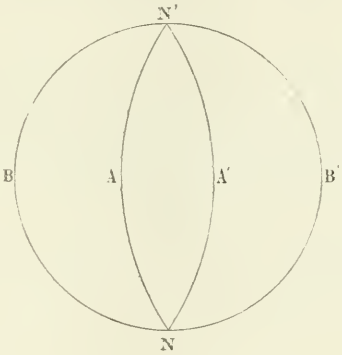
Donc l'équation ne présente aucun point singulier en dehors de l'équateur, et sur l'équateur même elle en a deux qui sont à l'inter-

section de l'équateur avec le grand cercle $y = 0$, et qui sont évidemment des nœuds.

L'équateur, passant par tous les points singuliers, rencontre tous les cycles limites; mais, comme c'est une caractéristique et qu'elle ne passe par aucun col, elle ne peut rencontrer aucune autre caractéristique en aucun autre point qu'aux deux nœuds N et N'; elle ne rencontre donc aucun cycle limite : donc il n'y a pas de cycle limite; donc toutes les caractéristiques partent de N pour aller aboutir en N'.

La *fig.* 24 représente la projection stéréographique du premier

Fig. 24.



hémisphère. NBN'B est l'équateur; NN' sont les nœuds; NAN', NA'N sont des caractéristiques.

Deuxième exemple — Soit (*fig.* 21) l'équation.

$$\frac{dy}{5xy - 5} = \frac{dx}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Ici encore les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent pas, mais l'expression $xY_2 - yX_2$ se réduit à

$$y(4x^2 - y^2),$$

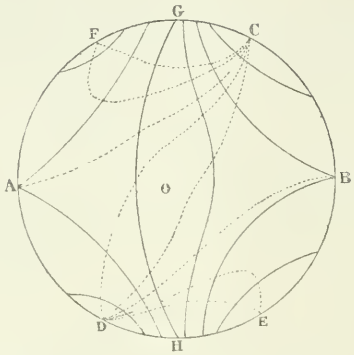
de sorte qu'elle s'annule pour

$$y = 0, \quad y = 2x, \quad y = -2x.$$

C'est dire :

1° Qu'en dehors de l'équateur il n'y a pas de point singulier ;

Fig. 25.



2° Que sur l'équateur il y a six points singuliers, dont quatre nœuds et deux cols.

En posant

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{z(-1 - t^2 + z^2)} = \frac{dt}{t(4 - t^2) - z^2(5 - t)}.$$

Faisons successivement $t = 0$, $t = 2$, $t = -2$; le coefficient de z dans le dénominateur de dz sera toujours négatif.

Considérons la différentielle du dénominateur de dt par rapport à t ; elle sera

Négative pour $t = -2$,

Positive pour $t = 0$,

Negative pour $t = 2$.

Donc les points $z = 0$, $t = \pm 2$ sont des nœuds; le point $z = t = 0$ est un col.

La figure représente encore la projection stéréographique du premier hémisphère; A et B sont les deux cols, CDEF les quatre nœuds.

Le système topographique des cycles sans contact a pour fonds et pour sommets C, D, E, F, pour cols A et B.

Considérons maintenant le grand cercle

$$x = 2.$$

En aucun point de ce grand cercle qui se projette en GH on n'a

$$x^2 + y^2 = 1,$$

ni par conséquent $dx = 0$. C'est donc un cycle sans contact. Donc, si C est un fond du système topographique des cycles sans contact, E est également un fond pendant que D et F sont des sommets.

Les lignes tracées en traits pleins sur la figure représentent alors le système topographique des cycles sans contact. D'ailleurs on ferait voir, comme dans le premier exemple, qu'il n'y a pas de cycle limite.

Les caractéristiques issues de C iront donc aboutir soit en F, soit en D, et la région occupée par les caractéristiques allant de C en F sera séparée de celle qui est occupée par les caractéristiques allant de C en D, par une caractéristique allant de C en A.

Il y a donc une caractéristique allant de C en A, s'il y en a allant de C en D. Dans ce cas, il y en a également une allant de D en B.

Nous nous trouvons donc en présence de deux hypothèses

	Première hypothèse.	*Deuxième hypothèse.*
Une infinité de caractéristiques allant.	de C en F de C en D de E en D	de C en F de E en F de E en D.
Une caractéristique allant.	de C en A de D en B	de E en A de F en B.

Pour décider entre ces deux hypothèses, remarquons que l'arc de grand cercle $y = 0$, qui va de A en B, est un arc sans contact. La ca-

ractéristique issue du point A ne peut donc le couper. Elle est donc tout entière dans l'un des deux quarts de sphère AOBCGF, AOBDHE.

Dans le voisinage du point A, l'équation différentielle s'écrit

$$z\frac{dt}{dz} = \frac{4t - t^3 - 5z^2 - tz^2}{-1 - t^2 + z^2} = -4t + 5z^2 - 3tz^2 + 5t^3 + \varphi_4,$$

φ_4 représentant une série commençant par les termes du quatrième degré en z et en t; d'où nous tirons

$$t = -\tfrac{5}{2}z^2 + z^3\theta\ldots,$$

θ étant une fonction holomorphe en z.

Donc, dans le voisinage du point A, la caractéristique qui passe par ce point passe par des points correspondant à $t < 0$, c'est-à-dire que la caractéristique est dans le quart de sphère AFGCBO. Elle est donc tout entière dans ce quart de sphère; elle ne peut donc aboutir au nœud E; elle aboutit donc au nœud C. C'est la première hypothèse qui doit être adoptée, et les caractéristiques présentent les formes représentées en trait plein sur la *fig.* 25.

Troisième exemple. — Soit (*fig.* 26) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1) - y(x^2+y^2+1)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1) + x(x^2+y^2+1)}.$$

Il n'y a qu'un point singulier dans chaque hémisphère; c'est le point $x = y = 0$ qui est un foyer.

Il n'y a aucun point singulier sur l'équateur, qui est une caractéristique et qui est par conséquent un cycle limite.

Considérons le système topographique des cercles qui ont leur centre à l'origine, c'est-à-dire des cycles

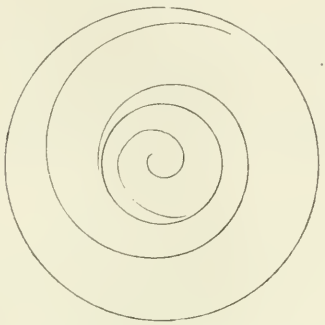
$$x^2 + y^2 = \text{const}.$$

La courbe des contacts de ce système topographique est

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1),$$

c'est-à-dire que tous ces cercles sont des cycles sans contact, excepté le cercle de rayon 1 qui est un cycle limite. Il n'y a pas d'autre cycle

Fig. 26.



limite. Le système des caractéristiques présente donc l'aspect de la *fig.* 26.

Quatrième exemple. — Soit (*fig.* 27) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)}.$$

On voit qu'il y a trois points singuliers :

1° Le point O

$$x = y = 0;$$

2° Les points A et B d'intersection des cercles

$$x^2+y^2-9=0, \quad x^2+y^2-2x-8=0.$$

Le point O est un foyer; le point A est un nœud; le point B est un col. On verrait, comme dans l'exemple précédent, que l'équateur est un cycle limite; que les cercles qui ont l'origine pour centre sont des

cycles sans contact, excepté les cercles

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 9 = 0,$$

qui sont des caractéristiques.

Le premier, qui ne passe par aucun point singulier, est un cycle limite; le second passe par un nœud et par un col.

Il y a donc trois catégories de caractéristiques : les premières

Fig. 27.

tournent autour du foyer O (*fig.* 27) et ont pour cycle limite

$$x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

les secondes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite

$$x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

les troisièmes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite l'equateur.

Comme caractéristiques exceptionnelles, on a :

1° L'équateur;

2° Le cercle $x^2 + y^2 = 1$;

3° Le cercle $x^2 + y^2 = 9$;

4° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite l'équateur;

5° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite

$$x^2 + y^2 = 1$$

Un point mobile qui, si t représente le temps, se meut d'après la loi

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 2x - 8),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 2x - 8),$$

ne pourra sortir du cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

s'il se trouve à l'intérieur de ce cercle.

Cinquième exemple. — Soit (*fig.* 28) l'équation

$$\frac{dx}{AC - B} = \frac{dy}{EC + A},$$

où

$$A = x(2x^2 + 2y^2 + 1),$$

$$B = y(2x^2 + 2y^2 - 1),$$

$$C = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 0,1.$$

Les points singuliers nous sont donnés par les équations

$$AC - B = 0,$$

$$BC + A = 0,$$

d'où

$$A = B = 0.$$

Ils sont donc au nombre de trois, dans chaque hémisphère, à savoir:

1° Deux foyers

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

2° Un col

$$x = y = 0.$$

Si nous considérons les courbes

$$F = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = \text{const.},$$

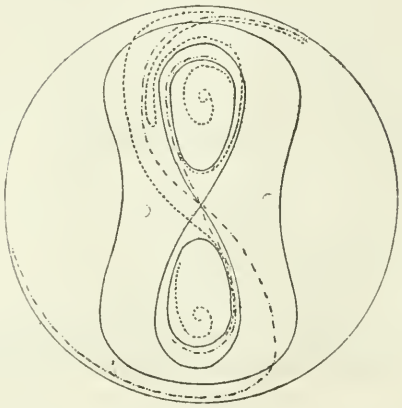
leurs contacts nous seront donnés par l'équation

$$\frac{dF}{dx}(AC - B) + \frac{dF}{dy}(BC + A) = 0.$$

Or

$$A = \frac{dF}{dx}, \quad B = \frac{dF}{dy};$$

Fig. 28.



l'équation précédente devient donc

$$(A^2 + B^2)C = 0,$$

où

$$C = 0.$$

Mais la courbe $C = 0$ est elle-même une des courbes

$$F = \text{const.}$$

Toutes les courbes $F = \text{const.}$ sont donc formées de cycles sans contact, excepté la courbe $C = 0$, qui est formée de cycles limites.

L'équateur est aussi un cycle limite.

Il reste à construire les courbes algébriques

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = K.$$

Pour $K < -\frac{1}{4}$, la courbe est entièrement imaginaire.

Pour $K = -\frac{1}{4}$, elle se réduit aux deux points singuliers

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour $0 > K > -\frac{1}{4}$, elle se compose de deux cycles.

Il en est ainsi, en particulier, de la courbe $C = 0$, qui se compose de deux cycles limites.

Pour $K = 0$, elle se réduit à un polycycle ayant un point double à l'origine.

Pour $K > 0$, elle se compose d'un seul cycle.

Le système des caractéristiques présente donc la forme qui est indiquée par la *fig.* 28.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES CYCLES SANS CONTACT.

La facilité avec laquelle se discutent complètement les exemples précédents est due à deux causes. En premier lieu, les cycles limites étant algébriques, le système topographique des cycles sans contact et des cycles limites est lui-même algébrique; en second lieu, la forme même de l'équation différentielle permet de trouver immédiatement ce système topographique; mais il est évident que cela n'aura pas lieu en général.

Quand les cycles limites ne sont pas algébriques, une discussion complète est évidemment impossible; car on ne pourra jamais trouver en termes finis l'équation des cycles limites. Mais on peut arriver à diviser la sphère : 1° en régions acycliques, où l'on est certain de

n'avoir aucun point d'aucun cycle limite; 2° en régions monocycliques, où se trouvent tous les points d'un des cycles limites et où l'on n'a aucun des points d'aucun autre cycle limite.

Une pareille séparation des cycles limites sera toujours possible quand les cycles limites seront en nombre fini.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons : 1° qu'il n'y a que deux points singuliers situés en dehors de l'équateur et que, par conséquent, ces deux points sont des foyers ou des nœuds; 2° que ces deux points ont pour coordonnées

$$x = y = 0.$$

Dans les cas où il y aurait plus de deux points singuliers, la discussion serait plus longue et plus compliquée.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, il n'y a qu'un nombre fini de cycles limites; de sorte que la séparation de ces cycles est toujours possible.

Nous ne considérerons que ce qui se passe dans le premier hémisphère. En effet, tout se passe de même de l'autre côté de l'équateur, qui est en général un cycle limite.

Nous diviserons cet hémisphère :

1° En régions acycliques, qui ne peuvent être traversées par aucun cycle limite.

2° En régions monocycliques, qui contiennent un cycle limite tout entier, et ne sont traversées par aucun autre.

3° En régions cycliques, qui contiennent *certainement* un cycle limite tout entier, et sont *peut-être* traversées par un ou plusieurs autres cycles limites.

4° En régions douteuses, qui contiennent *peut-être* un cycle limite tout entier, *peut-être* plusieurs, et qui *peut-être* ne sont traversées par aucun cycle limite.

On poussera la discussion en cherchant à étendre les régions acycliques de façon à resserrer les cycles limites dans des régions monocycliques de moins en moins étendues, et à faire disparaître les régions cycliques et les régions douteuses. On pourra, si l'on veut, terminer la discussion, quand il n'y aura plus que des régions acycliques et monocycliques; on pourra aussi la pousser plus loin, de façon à étendre

encore les régions acycliques et à y tracer un plus grand nombre de cycles sans contact.

Méthode générale. — Considérons une fonction algébrique

$$F_1(x, y):$$

1° Qui reste toujours finie et déterminée, ainsi que ses dérivées, quand x et y prennent des valeurs réelles et finies, et devient infinie quand x ou y sont infinis;

2° Qui soit nulle pour $x = y = 0$, et positive toutes les fois que x ou y sont différents de 0;

3° Dont les dérivées du premier ordre ne s'annulent à la fois que si $x = y = 0$;

4° Telle que, pour $x = y = 0$, on ait l'inégalité

$$\left(\frac{d^2F_1}{dx\,dy}\right)^2\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right)^2 - 4\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{d^2F_1}{dx^2}\frac{d^2F_1}{dy^2} < 0;$$

5° Telle que la courbe

$$X\frac{dF_1}{dx} + Y\frac{dF_1}{dx} = 0$$

ne coupe pas l'équateur.

L'équation

$$F_1 = K_1,$$

où K_1 est une constante quelconque, représente un système topographique ayant pour sommet l'origine et dont l'équateur est un cycle.

La courbe des contacts dont l'équation est

$$X\frac{dF_1}{dx} + Y\frac{dF_1}{dy} = 0$$

ne coupe pas l'équateur, en vertu de la cinquième condition, et a à l'origine un point isolé, en vertu de la quatrième condition.

Les cycles $F_1 = K$ sont donc sans contact si K_1 est très petit et s'il

est très grand. Faisons varier K_1 depuis o jusqu'à $+\infty$, et supposons, par exemple, que pour

$0 < K_1 < \alpha$,	le cycle $F_1 = K_1$	soit sans contact;
$\alpha < K_1 < \beta$,	»	ne soit pas sans contact;
$\beta < K_1 < \gamma$,	»	soit sans contact;
$\gamma < K_1 < \delta$,	»	ne soit pas sans contact;
$\delta < K_1 < +\infty$,	»	soit sans contact.

Alors les régions de la sphère, définies par les inégalités

$$0 < F_1 < \alpha, \quad \beta < F_1 < \gamma, \quad \delta < F_1 < +\infty,$$

seront acycliques; les régions définies par les inégalités

$$\alpha < F_1 < \beta, \quad \gamma < F_1 < \delta$$

seront douteuses.

Premier problème. — *Reconnaître si une région douteuse est cyclique.*

Pour cela, nous allons donner un moyen de reconnaître si dans une région douteuse passe un nombre pair ou impair de cycles limites. Il est clair que, si l'on trouve que le nombre des cycles limites qui traversent une région douteuse est impair, c'est que cette région est cyclique. Pour résoudre le problème que nous nous sommes proposé, il est nécessaire d'introduire une notion nouvelle.

Soit ABC un arc d'un cycle sans contact, soit EBD un arc du grand cercle $y = 0$. Soit (*fig.* 29) EB la portion de cet arc qui est située à l'extérieur du cycle ABC; BD la portion qui est située à l'intérieur; BC la portion de l'arc ABC qui serait à la droite d'un observateur ayant les pieds sur la sphère en B et regardant du côté de E; BA la portion qui serait à la gauche de cet observateur. Nous dirons que le cycle ABC est positif, par rapport à l'arc de grand cercle $y = 0$, quand la caractéristique qui passe en B est située dans l'angle EBC, en FB par exemple, et qu'il est négatif quand cette caractéristique est située dans l'angle EBA, en F'B par exemple.

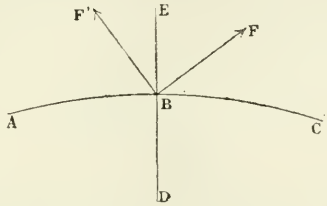
Ceci posé, remarquons que, si l'on fait varier le cycle ABC, ce cycle change de signe : 1° toutes les fois qu'il devient un cycle limite ; 2° toutes les fois que EB est tangent à FB.

Maintenant nous sommes en état de résoudre le problème proposé. A cet effet, considérons la région douteuse comprise entre les cycles

$$F_1 = \alpha, \quad F_1 = \beta.$$

Soient A et B les points où l'arc de grand cercle $y = 0$ rencontre ces cycles. Soit λ le nombre des cycles limites compris dans la région

Fig. 29.



douteuse ; soit μ le nombre des contacts du grand cercle $y = 0$ compris entre A et B ; soit ν un nombre qui est pair si les cycles $F_1 = \alpha$, $F_1 = \beta$ sont de même signe, impair dans le cas contraire ; soit θ le nombre de fois que les cycles sans contact du système topographique défini au théorème XVIII changent de signe quand on passe du cycle $F_1 = \alpha$ au cycle $F_1 = \beta$; on aura

$$\theta = \lambda + \mu, \quad \theta \equiv \nu \pmod 2,$$

d'où

$$\lambda \equiv \mu + \nu \pmod 2,$$

ce qui permet de voir si le nombre des cycles limites est pair ou impair.

Problème II. — Reconnaître si une région est monocyclique.

Pour résoudre ce problème, appuyons-nous sur le théorème suivant.

THÉORÈME XIX. — *Si l'on pose*

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

et que l'équation différentielle devienne

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \varphi(\rho, \omega);$$

si $\psi(\rho)$ *est une fonction quelconque de* ρ *n'ayant qu'une valeur finie pour chaque valeur finie de* ρ; *entre deux cycles limites quelconques, il y a toujours des points où*

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty \quad \text{ou} \quad \varphi(\rho) = \infty,$$

ou bien où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\psi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Soient en effet ω_0 une certaine valeur de ω, ρ_0 et ρ'_0 les valeurs de ρ qui correspondent aux points d'intersection des deux cycles limites considérés et de l'arc de grand cercle

$$\omega = \omega_0.$$

Considérons la fonction

$$\psi(\rho'_0) - \psi(\rho_0) = \Theta(\omega_0),$$

et voyons comment elle varie quand ω_0 varie de 0 à 2π. Il est clair qu'elle varie d'une façon continue, qu'elle reste finie et qu'elle revient à la même valeur.

Elle passe donc par un maximum, et, pour une certaine valeur ω_1 de ω_0 correspondant à des valeurs ρ_1 et ρ'_1 de ρ_0 et ρ'_0, on aura

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} = 0,$$

ou

$$\frac{d\psi}{d\rho'_0}\varphi(\rho'_1, \omega_1) = \frac{d\psi}{d\rho_0}\varphi(\rho_1, \omega_1).$$

Donc, si l'on considère ω comme une constante égale à ω_1, et qu'on fasse varier ρ depuis ρ_1 jusqu'à ρ'_1, la fonction

$$\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)$$

deviendra infinie ou passera par un maximum, c'est-à-dire que l'on aura ou bien

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty,$$

ou bien

$$\varphi = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)\right] = 0$$

Théorème XIX généralisé. — *Si $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont deux fonctions continues de x et de y telles qu'à chaque système de valeurs de x et de y corresponde un système de valeurs de φ et de ψ, et un seul, et qu'à chaque système de valeurs de φ et de ψ corresponde un système de valeurs de x et de y, et un seul.*

Si l'on pose

$$\varphi(x, y) = \xi, \quad \psi(x, y) = \eta.$$

Si, après cette transformation, l'équation devient

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \theta(\xi, \eta),$$

dans la région comprise entre deux cycles limites, il y aura toujours des points tels que

$$\theta = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soient C et C′ les deux cycles limites donnés. Supposons qu'en aucun point de la région R comprise entre ces deux cycles on n'ait $\delta = \infty$; je dis qu'il y aura dans cette région des points où l'on aura

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soit m un point du cycle C, et soit η_0 la valeur correspondante de la fonction $\psi(x, y)$; l'arc de courbe

$$\psi(x, y) = \eta_0,$$

qui passe en m, va couper le cycle C′ en un point m', car, s'il ne coupait pas le cycle C′, il ne pourrait sortir de la région R qu'en recoupant le cycle C ; il devrait donc, dans cette région R, être tangent à une caractéristique (en vertu du théorème X). Or cela est impossible, puisqu'on a supposé que dans la région R on n'a pas

$$\delta = \infty.$$

Soient donc ξ_0 et ξ'_0 les valeurs de ξ qui correspondent aux points m et m'.

Quand le point m fera le tour du cycle C, la fonction

$$\xi'_0 - \xi_0$$

passera par un maximum, c'est-à-dire que pour une certaine valeur η_1 de η_0, à laquelle correspondent les valeurs ξ_1 et ξ'_1 de ξ_0 et ξ'_0, on aura

$$\delta(\xi'_1, \eta_1) = \delta(\xi_1, \eta_1),$$

c'est-à-dire que, quand η est égal à η_1 et que l'on fait varier ξ depuis ξ_1 jusqu'à ξ'_1, la fonction δ passe par un maximum ou un minimum, ou que

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Résolution du deuxième problème. — Pour démontrer qu'une région

douteuse est monocyclique ou acyclique, il suffit donc de faire voir que l'on peut trouver deux fonctions ξ et η satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème précédent, et telles que l'on n'ait en aucun point de la région

$$\theta = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

Suite de la discussion. — Si le système topographique

$$F_1 = k_1$$

ne suffit pas pour obtenir une séparation complète des cycles limites, on considérera un nombre aussi grand qu'on voudra de systèmes satisfaisant aux mêmes conditions

$$F_2 = k_2, \quad F_3 = k_3;$$

1° Il est clair que, chacun de ces systèmes fournissant de nouveaux cycles sans contact, certaines portions des régions douteuses laissées par le système $F_1 = k_1$ seront sillonnées par ces cycles et deviendront acycliques;

2° Parmi les régions douteuses laissées par l'ensemble de tous ces systèmes, il y en aura dans l'intérieur desquelles il sera impossible de faire passer un cycle entourant l'origine; ces régions seront donc aussi acycliques (*voir* l'exemple II au Chapitre suivant);

3° Les régions douteuses, devenant de plus en plus restreintes, finiront en général par devenir toutes acycliques ou monocycliques, de manière à achever la séparation des cycles limites; cette séparation sera même toujours possible; et, quand on n'aura pas deux cycles limites confondus, on pourra toujours s'apercevoir qu'elle est terminée;

4° Les régions cycliques devenant de plus en plus restreintes, on connaîtra le cycle limite avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

Remarque. — La théorie de la séparation des cycles limites présente quelque analogie avec les procédés qui servent à séparer les racines d'une équation algébrique.

A ce point de vue, la manière dont se résout le premier problème rappelle la méthode des substitutions, qui permet de reconnaître si, dans un intervalle donné, une équation algébrique admet un nombre pair ou impair de racines.

Le théorème XIX est l'équivalent du théorème de Rolle.

Quant au cas des cycles limites confondus, qui correspond à celui des racines multiples, il présente certaines difficultés spéciales que je n'ai pas encore résolues

CHAPITRE IX.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS INCOMPLÈTES.

Exemple I. — Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-2x-3)-y} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-2x-3)+x},$$

qui, en posant

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

devient

$$d\rho = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)\,d\omega.$$

Prenons, pour le système topographique $F_1 = k_1$, le système des cercles

$$\rho = k_1.$$

La courbe des contacts de ces cercles se réduit à l'ellipse sphérique

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3 = 0,$$

qui enveloppe l'origine. Par conséquent, les régions

$$\rho < 1, \quad \rho > 3$$

sont acycliques pendant que la région

$$1 < \rho < 3$$

est douteuse; mais, si l'on observe que les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de signe contraire, on verra qu'elle est cyclique.

Appuyons-nous maintenant sur le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = \mathrm{L}\rho, \quad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3),$$

d'où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\psi}{d\rho}, \varphi\right) = 2\rho - 2\cos\omega.$$

La courbe $2\rho - 2\cos\omega = 0$ est une ellipse sphérique passant par l'origine et tangente au cercle $\rho = 1$. Donc, en aucun point de la région $1 < \rho < 3$, on n'a ni

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty, \quad \varphi = \infty, \quad \frac{d}{d\rho}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Donc cette région est monocyclique.

Conséquences. — Outre l'équateur, il y a un cycle limite dans chaque hémisphère, et un seul; ce cycle est tout entier dans la région

$$1 < \rho < 3.$$

Si un point mobile se meut suivant la loi suivante (t étant le temps),

$$dx = [x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y]\,dt,$$
$$dy = [y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x]\,dt.$$

Si pour $t = 0$ on a $\rho < 1$, le mobile sortira certainement du cercle $\rho = 1$, et il ne sortira certainement pas du cercle $\rho = 3$.

Exemple II. — Soit l'équation

$$\frac{dx}{-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)} = \frac{dy}{x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)},$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 2\rho(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Considérons encore les cercles $\rho = k_1$, nous verrons que les régions $\rho < 1$, $\rho > 3$ sont acycliques pendant que la région $1 < \rho < 3$ est douteuse.

Seulement ici les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de même signe; de sorte que l'on ne peut affirmer que cette région soit cyclique.

Considérons le cycle

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho^2 - 3,5\rho\cos\omega - 2 = 0.$$

Pour qu'il eût un contact, il faudrait que l'on eût

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} = 2\frac{d\varphi}{d\rho}(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Mais tout le long du cycle $\varphi = 0$, on a

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\rho}}\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} < 1,5,$$

et

$$\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3 > 1,25.$$

La relation (λ) ne peut donc être satisfaite, c'est-à-dire que le cycle $\varphi = 0$ est sans contact. Il en sera de même des cycles $\varphi = k_2$, pourvu que $-\varepsilon < k_2 < +\varepsilon$ et que ε soit suffisamment petit.

La région $-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon$ est donc acyclique. Il resterait donc deux régions douteuses

1° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi > +\varepsilon$;

2° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi < -\varepsilon$.

Mais dans aucune de ces régions on ne peut faire passer de cycle enveloppant l'origine. Elles sont donc aussi acycliques.

Conséquences. — Il n'y a pas d'autre cycle limite que l'équateur.

Un point mobile se mouvant suivant la loi

$$dx = (-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3))\,dt$$
$$dy = (x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3))\,dt$$

peut se rapprocher indéfiniment de l'équateur.

Exemple III. — Soit l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8).$$

La considération des cycles $\rho =$ const. nous montre :

1° Que les régions $\rho < 1$ et $\rho > 4$ sont acycliques;

2° Que la région $1 < \rho < 4$ est douteuse

De plus, les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$ étant de même signe, il doit y avoir dans cette région un nombre pair de cycles limites.

Considérons le cycle

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = 0.$$

Ce cycle est tout entier dans la région douteuse; il est sans contact, ainsi que les cycles

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = k_2, \quad \text{où} \quad k_2 < +\varepsilon, \quad k_2 > -\varepsilon.$$

et où ε est très petit. De plus, ces cycles ne sont pas de même signe que les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$.

Nous avons donc les régions suivantes :

1re région	$\rho < 1$	Acyclique.
2e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta < -\varepsilon$	Cyclique.
3e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta - \varepsilon < \theta < +2$	Acyclique.
4e région	$1 < \rho < 4, \quad \theta > +\varepsilon$	Cyclique.
5e région	$\rho > 4$	Acyclique.

Appliquons maintenant le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = \log\rho, \quad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8),$$

où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 2(\rho\cos\omega)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5).$$

La courbe $\frac{d}{d\varphi}\left(\varphi, \frac{d\psi}{d\varphi}\right) = 0$ se réduit donc aux deux cycles

$$\rho = \cos\omega, \quad \rho^2 = 2\rho\cos\omega + 5, 5,$$

qui sont tout entiers l'un dans la première, l'autre dans la troisième région. Comme d'ailleurs ni φ ni $\frac{d\psi}{d\varphi}$ ne deviennent infinis, la deuxième et la quatrième région sont monocycliques.

Conclusion. — En dehors de l'équateur, il y a dans chaque hémisphère deux cycles limites, et il n'y en a que deux.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Resa

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

Dans le numéro de février 1882 du *Journal de Mathématiques*, vous considérez le niveau potentiel d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques; permettez-moi de faire observer qu'on peut obtenir la valeur de ce niveau sous une forme simple en partant de l'expression donnée par Legendre pour le potentiel d'un ellipsoïde relativement à un point qui fait partie de sa masse.

Soit un ellipsoïde ayant pour axes $2a$, $2b$, $2c$, et dont l'intérieur est rempli d'une substance attirante de densité égale à l'unité; le potentiel pour un point intérieur M, dont les coordonnées par rapport aux axes de l'ellipsoïde sont x, y, z, peut s'écrire

$$V = \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right) \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Imaginons un second ellipsoïde rempli de la même matière que le premier, et dont les axes s'obtiendraient en dilatant ceux du premier dans le rapport de λ à l'unité; son potentiel relatif à M serait

$$V_1 = \pi\lambda^3 abc$$
$$\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 a^2+t_1} - \frac{y^2}{\lambda^2 b^2+t_1} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2+t_1}\right) \frac{dt_1}{\sqrt{(\lambda^2 a^2+t_1)(\lambda^2 b^2+t_1)(\lambda^2 c^2+t_1)}}.$$

Transformons l'intégrale en posant $t_1 = \lambda^2 t$, et nous aurons, après quelques réductions très simples,

$$V_1 = \pi abc \int_0^\infty \left(\lambda^2 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right) \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Le potentiel, relatif à M, de la couche comprise entre les deux ellipsoïdes est égal à $V_1 - V$; on constate que la différence est indépendante de x, y, z, comme cela devait être pour le niveau potentiel de la couche relativement aux points de son intérieur, et on a pour l'expression cherchée,

$$W = V_1 - V = \pi(\lambda^2 - 1) abc \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Quand deux axes a et b sont égaux, l'intégration peut s'effectuer : si l'on pose $c^2 + t = u^2$, on trouve, pour le cas de l'ellipsoïde aplati, aussi bien que pour celui de l'ellipsoïde allongé,

$$W = 2\pi(\lambda^2 - 1) a^2 c \int_c^\infty \frac{du}{u^2 + a^2 - c^2};$$

on arrive aux résultats donnés dans votre Note, et dont la forme est différente selon que a^2 est $\gtrless c^2$; en introduisant l'excentricité e de l'ellipse méridienne, on aurait

$$a^2 - c^2 = a^2 e^2, \quad W = 2\pi(\lambda^2 - 1)\frac{ac}{e} \arcsin e$$

pour l'ellipsoïde aplati ou planétaire;

$$c^2 - a^2 = c^2 e^2, \quad W = \pi(\lambda^2 - 1)\frac{a^2}{e} \mathrm{L}\frac{1+e}{1-e}$$

pour l'ellipsoïde allongé ou ovaire.

Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure;

PAR M. GENTY.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES

1. L'équation vectorielle d'une droite étant

$$\mathfrak{V}(x - a)u = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{V}xu = \mathfrak{V}au = v,$$

une droite est déterminée par les vecteurs u et $\mathfrak{V}au$ ou v, qui donnent sa direction, celle de la normale au plan mené par l'origine de la droite, ainsi que la distance de l'origine à la droite. Nous appellerons ces deux vecteurs les *vecteurs coordonnés* de la droite, et nous désignerons par (u, v) la droite qui a pour vecteurs coordonnés u et v.

Si l'on a $u = 0$, la droite $(0, v)$ est située tout entière à l'infini dans un plan normal à v.

Si l'on a, au contraire, $v = 0$, la droite $(u, 0)$ passe par l'origine : c'est la droite indéfinie dirigée suivant le vecteur u.

2. Réciproquement, étant données quatre conditions simples aux-

quelles une droite doit satisfaire (ce qui suffit pour la déterminer), il est possible de calculer ses vecteurs coordonnés.

En effet, u, pouvant avoir un module quelconque, ne dépend que de deux conditions, et entre les vecteurs u et v il existe la relation nécessaire

$$\mathfrak{S}uv = 0,$$

qui, jointe aux quatre conditions données, permettra de les déterminer.

3. Ceci posé, une équation

$$F(u, v) = 0, \tag{1}$$

algébrique et homogène par rapport aux vecteurs u et v, représente le *complexe* des droites, en nombre infini, dont les coordonnées satisfont à cette équation.

Si l'équation (1) est d'ordre n, le complexe qu'elle représente est lui-même d'ordre n.

4. Comme application, cherchons l'équation du complexe des droites qui rencontrent toutes une droite donnée.

Soient u_1, v_1 les vecteurs coordonnés de la droite donnée; u et v ceux de l'une quelconque des droites du complexe; la condition du problème donne immédiatement

$$\mathfrak{S}uv_1 + \mathfrak{S}u_1v = 0, \tag{2}$$

équation d'un complexe linéaire spécial.

Si l'on suppose que u et u_1 sont des vecteurs unitaires, le premier membre de l'équation ci-dessus représente le produit de la plus courte distance des deux droites (u, v) et (u_1, v_1), par le sinus de leur angle, c'est-à-dire le moment de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Donc le complexe des droites dont les moments, par rapport à deux droites fixes (u_1, v_1) et (u_2, v_2), ont un rapport constant, a pour équation

$$\mathfrak{S}uv_1 + \mathfrak{S}uv_1 = k(\mathfrak{S}uv_2 + \mathfrak{S}u_2v). \tag{3}$$

Cette équation représente le complexe linéaire le plus général. Les droites $(\mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1)$, $(\mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2)$ sont les directrices de ce complexe, et k son module (DRACH, *Annalen Mathematischen*, t. II), et l'on reconnaît sans peine qu'une droite arbitraire peut être choisie pour l'une des directrices d'un complexe linéaire donné.

5. Cherchons encore le complexe des droites qui coupent un ellipsoïde suivant des cordes vues du centre sous un angle droit.

Soit

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\Phi\mathrm{X} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde.

Les points d'intersection $\mathrm{A} + k_1\mathrm{U}$, $\mathrm{A} + k_2\mathrm{U}$ d'une droite avec cette surface seront donnés par l'équation

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A} + k\mathrm{U})\Phi(\mathrm{A} + k\mathrm{U}) = 1,$$

ou

$$(4) \qquad k^2\mathfrak{S}\mathrm{U}\Phi\mathrm{U} + 2k\mathfrak{S}\mathrm{U}\Phi\mathrm{A} + \mathfrak{S}\mathrm{A}\Phi\mathrm{A} - 1 = 0,$$

et la condition du problème donne

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A} + k_1\mathrm{U})(\mathrm{A} + k_2\mathrm{U}) = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{T}^2\mathrm{A} + (k_1 + k_2)\mathfrak{S}\mathrm{AU} + k_1k_2\mathfrak{T}^2\mathrm{U} = 0.$$

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de $k_1 + k_2$ et de k_1k_2 tirées de l'équation (4), il vient

$$\mathfrak{T}^2\mathrm{A}\,\mathfrak{S}\mathrm{U}\,\Phi\mathrm{U} - 2\mathfrak{S}\mathrm{A}\,\Phi\mathrm{U}\,\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathfrak{S}\mathrm{A}\,\Phi\mathrm{A}\,\mathfrak{T}^2\mathrm{U} - \mathfrak{T}^2\mathrm{U} = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad \mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\mathrm{AU}(\mathfrak{V}\Phi\mathrm{AU} + \mathfrak{V}\mathrm{A}\Phi\mathrm{U}) - \mathfrak{T}^2\mathrm{U} = 0;$$

or on a

$$\mathfrak{V}\Phi\mathrm{AU} + \mathfrak{V}\mathrm{A}\Phi\mathrm{U} = (m_2 - \Phi)\mathfrak{V}\mathrm{AU} = \Psi\mathrm{V},$$

en posant

$$m_2 - \Phi = \Psi,$$

et l'équation (5) devient

$$(6)\qquad \mathfrak{T}^2 U - \mathfrak{S} V \Psi V = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre extrêmement intéressant, mais qui n'est qu'un cas particulier de celui que nous étudierons plus loin.

6 Cherchons enfin, comme dernière application, l'équation du complexe des droites qui coupent harmoniquement deux quadriques concentriques données.

Soient

$$\mathfrak{S} X \Phi X = 1, \quad \mathfrak{S} X \Psi X = 1$$

les équations de ces deux quadriques : leurs points d'intersection avec une droite seront donnés par les équations

$$\mathfrak{S}(A + kU)\Phi(A + kU) = 1,$$
$$\mathfrak{S}(A + kU)\Psi(A + kU) = 1,$$

qui, développées, prennent la forme

$$k^2 \mathfrak{S} U \Phi U + 2k \mathfrak{S} A \Phi U + \mathfrak{S} A \Phi A - 1 = 0,$$
$$k^2 \mathfrak{S} U \Psi U + 2k \mathfrak{S} A \Psi U + \mathfrak{S} A \Psi A - 1 = 0,$$

et la condition du problème donne

$$\mathfrak{S} U \Phi U (\mathfrak{S} A \Phi A - 1) + \mathfrak{S} U \Psi U (\mathfrak{S} A \Phi A - 1) - 2 \mathfrak{S} U \Phi A \, \mathfrak{S} U \Psi A = 0,$$

ou bien

$$(7)\qquad \mathfrak{S} U (\Phi + \Psi) U + \mathfrak{S} V (\mathfrak{V} \Phi U \Psi A + \mathfrak{V} \Psi U \Phi A) = 0$$

Or on peut poser

$$\mathfrak{V} \Phi U \Psi A + \mathfrak{V} \Psi U \Phi A = \Theta \mathfrak{V} U A \quad (^1)$$

---

(1) On a en effet

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} \Phi X \Psi Y + \mathfrak{V} \Psi X \Phi Y &= (m, \Phi)[(m_2, \Psi \Phi^{-1}) \Phi^{-1} - \Phi^{-1} \Psi \Phi^{-1}] \mathfrak{V} X Y \\ &= (m, \Psi)[(m_2, \Phi^{-1}) \Psi^{-1} - \Psi^{-1} \Phi \Psi^{-1}] \mathfrak{V} X Y, \end{aligned}$$

et l'équation (7) prend la forme

$$(8)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{U}(\Phi+\Psi)\mathrm{U}-\mathfrak{S}\mathrm{V}\Theta\mathrm{V}=0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

7. Les droites d'un complexe qui passent par un point donné sont situées sur un cône qu'on appelle *cône du complexe*.

Si

$$(9)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{U},\mathfrak{V}\mathrm{AU})=0$$

est l'équation d'un complexe, on reconnaît sans peine qu'on obtient l'équation du cône de ce complexe qui a son sommet au point A, rapportée à ce point pris pour origine, en remplaçant dans l'équation (9) U par X, ce qui donne

$$\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathfrak{V}\mathrm{AX})=0,$$

équation algébrique d'ordre n. Donc, *les droites d'un complexe d'ordre n qui passent par un point donné engendrent un cône d'ordre n.*

Si l'on rapporte le cône à l'ancienne origine, son équation devient

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}-\mathrm{A},\mathfrak{V}\mathrm{AX})=0,$$

ou, en posant

$$\mathrm{A}=a\mathrm{L},$$

L étant un vecteur unitaire,

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}-a\mathrm{L},a\mathfrak{V}\mathrm{LX})=0,$$

et si dans cette équation on suppose $a=\infty$, elle devient

$$\mathrm{F}(\mathrm{L},\mathfrak{V}\mathrm{LX})=0;$$

elle représente alors le *cylindre du complexe* parallèle au vecteur L.

---

en désignant par (m,Φ) l'invariant m de la fonction linéaire Φ, par $(m_2,\Psi\Phi^{-1})$ l'invariant m_2 de la fonction linéaire $\Psi\Phi^{-1}$, etc. (Laisant, *Introduction à la méthode des quaternions*, n° 126).

8. De même, les droites d'un complexe qui sont situées dans un plan enveloppent une courbe qu'on appelle *courbe du complexe*, et il est facile de démontrer que les courbes d'un complexe d'ordre n sont de la classe n.

Soit, en effet,

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{NX} = 1$$

l'équation du plan donné.

Pour qu'une droite du complexe soit située dans ce plan, il faut qu'on ait

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{NA} = 1, \quad \mathfrak{S}\,\mathrm{NU} = 0.$$

On a, par suite,

$$\mathrm{U} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\,\mathrm{AU}\,.\,\mathrm{N}) = \mathfrak{V}\,\mathrm{VN}.$$

Si l'on porte cette valeur de U dans l'équation du complexe, celle-ci devient

$$\mathrm{F}(\mathfrak{V}\,\mathrm{VN}\,.\,\mathrm{V}) = 0,$$

et si maintenant, dans cette équation, on regarde V comme vecteur variable, elle représente un cône d'ordre n. Or ce cône est évidemment le réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe enveloppe cherchée; donc cette courbe est bien de la classe n.

Si le plan donné passe par l'origine, son équation est

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{NX} = 0,$$

et l'on reconnait sans peine, par un simple déplacement de l'origine, que la courbe polaire réciproque de la courbe du complexe située dans le plan donné a pour équations

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{NX} = 0,$$

$$\mathrm{F}(\mathfrak{V}\,\mathrm{XN}, \mathrm{N}) = 0.$$

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES COMPLEXES DU SECOND ORDRE QUI ONT UN CENTRE DE FIGURE.

9. L'équation générale d'un complexe du second ordre est évidemment de la forme

$$(1) \qquad \mathfrak{S}\,\mathrm{U}\,\Phi\,\mathrm{U} + 2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{U}\,\Theta\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AU} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AU}\,\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AU} = 0,$$

dans laquelle Φ et Ψ sont des fonctions vectorielles linéaires conjuguées à elles-mêmes, et Θ une fonction du même genre, mais qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même.

Si, dans cette équation, on change A en $-A$, elle devient

$$(2)\qquad \mathfrak{S}U\Phi U - 2\mathfrak{S}U\Theta\mathfrak{V}AU + \mathfrak{S}\mathfrak{V}AU\Psi\mathfrak{V}AU = 0,$$

et si l'origine est un centre de figure, les équations (1) et (2) doivent être identiques, ce qui exige que l'on ait

$$(3)\qquad \Theta = 0,$$

ou bien

$$(4)\qquad \Phi = \Psi = 0.$$

On a donc ainsi deux genres de complexes du second ordre ayant un centre de figure. En prenant ce point pour l'origine des coordonnées, les complexes du premier genre ont pour équation

$$(5)\qquad \mathfrak{S}U\Phi U + \mathfrak{S}\mathfrak{V}AU\Psi\mathfrak{V}AU = 0,$$

et les complexes du second genre,

$$(6)\qquad \mathfrak{S}U\Theta\mathfrak{V}AU = 0.$$

Si maintenant l'on transporte l'origine en un point quelconque E, ces équations prennent la forme

$$\mathfrak{S}U\Phi U + \mathfrak{S}\mathfrak{V}(A+E)U\Psi\mathfrak{V}(A+E)U = 0,$$
$$\mathfrak{S}U\Theta\mathfrak{V}(A+E)U = 0,$$

ou encore, après le développement des premiers membres,

$$(7)\qquad \mathfrak{S}U(\Phi + \mathfrak{V}E\Psi\mathfrak{V}UE) + 2\mathfrak{S}\mathfrak{V}EU\Psi\mathfrak{V}AU + \mathfrak{S}\mathfrak{V}AU\Psi\mathfrak{V}AU = 0,$$
$$(8)\qquad \mathfrak{S}U\Theta\mathfrak{V}EU + \mathfrak{S}U\Theta\mathfrak{V}AU = 0,$$

ou enfin

$$(9)\qquad \mathfrak{S}_U(\Phi + \mathfrak{V}_E \Psi \mathfrak{V}_{UE}) - 2\mathfrak{S}_U \theta_1 \mathfrak{V}_{AU} + \mathfrak{S}\mathfrak{V}_{AU} \Psi \mathfrak{V}_{AU} = 0,$$

$$(10)\qquad \mathfrak{S}_U \Phi_1 U + \mathfrak{S}_U \theta \mathfrak{V}_{AU} = 0,$$

en posant

$$(11)\qquad \theta_1 \mathfrak{V}_{AU} = -\mathfrak{V}_E \Psi \mathfrak{V}_{AU},$$

$$(12)\qquad \Phi_1 U = \frac{\theta \mathfrak{U}_{EU} - \mathfrak{U}_E \theta' U}{2}.$$

Si donc la fonction θ qui entre dans l'équation générale (1) est de la forme définie par la relation (11), cette équation représente un complexe du premier genre, ayant pour centre de figure le point E; en transportant l'origine en ce point, l'équation du complexe prendra la forme (5).

De même, si la fonction Ψ n'entre pas dans l'équation d'un complexe, et si la fonction Φ s'y trouve sous la forme définie par la relation (12), cette équation représente un complexe à centre du second genre, et elle pourra se réduire à la forme simple (6) par un simple déplacement de l'origine.

10. Rappelons enfin que l'on appelle *surface singulière* d'un complexe du second ordre le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à un système de deux plans, ou bien encore l'enveloppe des plans dans lesquels la conique du complexe se réduit à un système de deux points. Cette surface du quatrième ordre et de la quatrième classe est une *surface de Kummer;* elle a seize points singuliers pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents, et seize plans tangents singuliers dans lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents.

CHAPITRE II.

PREMIER GENRE DES COMPLEXES DU SECOND ORDRE QUI ONT UN CENTRE DE FIGURE. SURFACE DE KUMMER RELATIVE A CES COMPLEXES.

11. *Équation générale.* — D'après ce qui précède, le premier genre des complexes du second ordre qui ont l'origine pour centre de figure est représenté par l'équation générale

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{U}\,\Phi\,\mathrm{U} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AU}\,\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AU} = 0, \tag{1}$$

dans laquelle Φ et Ψ sont deux fonctions vectorielles linéaires conjuguées à elles-mêmes.

La fonction Ψ, qui ne change pas quand on déplace l'origine des coordonnées, est la *fonction caractéristique* du complexe. Nous appellerons en outre, d'après Plücker, *surface caractéristique* la quadrique qui a pour équation

$$m_\Phi\,\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Psi^{-1}\,\mathrm{X} = 1,$$

dans laquelle m_Φ est l'invariant m de la fonction Φ, invariant que nous supposerons différent de zéro dans tout ce qui va suivre.

12. *Équations vectorielles de la surface de Kummer.* — Le cône du complexe qui a son sommet au point X_1 a pour équation

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi\,\mathrm{X} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}\,\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{X}_1\,\mathrm{X} = 0,$$

ou

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Theta\,\mathrm{X} = 0,$$

en posant

$$\Theta\,\mathrm{X} = \Phi\,\mathrm{X} - \mathfrak{V}\,\mathrm{X}_1\,\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{X}\mathrm{X}_1.$$

Pour que ce cône se réduise à un système de deux plans, il faut que $\Theta\,\mathrm{X}$ se réduise à une fonction linéaire à deux termes, c'est-à-dire qu'on ait, pour un vecteur L convenablement choisi,

$$\Theta\,\mathrm{L} = 0,$$

ou bien

$$\Phi_L - \mathfrak{V}_{X_1}\Psi\mathfrak{V}_{LX_1} = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons X_1 par X, nous aurons

$$(1) \qquad \Phi_L = \mathfrak{V}_X\Psi\mathfrak{V}_{LX}.$$

C'est l'équation vectorielle de la surface singulière du complexe, c'est-à-dire de la surface de Kummer (K) relative à ce complexe.

Le vecteur L, qui entre dans cette équation, est complètement arbitraire. A chaque direction différente de ce vecteur, correspond un point de la surface (K); la *ligne singulière* [1] du complexe qui passe par ce point est parallèle à L.

15. En opérant sur l'équation (1) avec $\mathfrak{S}.X\times$ et $\mathfrak{S}.\Psi\mathfrak{V}_{LX}\times$ successivement, il vient

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}X\Phi_L = 0, \\ \mathfrak{S}\Phi_L\Psi\mathfrak{V}_{LX} = \mathfrak{S}LX\Psi\Phi_L = 0. \end{cases}$$

Ces équations représentent deux plans dont l'intersection est le vecteur OX, du point de la surface (K) correspondant au vecteur donné L.

Soient M un second vecteur déterminé par l'équation

$$(3) \qquad \Phi_M = \mathfrak{V}_L\Psi\Phi_L,$$

et X le point de la surface (K) qui correspond à ce vecteur. On aura successivement

$$\Psi\Phi_M = \Psi\mathfrak{V}_L\Psi\Phi_L = m_\psi\mathfrak{V}\Psi^{-1}L\Phi_L,$$

$$M = \Phi^{-1}\mathfrak{V}_L\Psi\Phi_L = \frac{1}{m}\mathfrak{V}\Psi_L\Phi\Psi\Phi_L,$$

$$\mathfrak{V}_M\Psi\Phi_M = \frac{m_\psi}{m_\Phi}\mathfrak{V}.\mathfrak{V}\Psi^{-1}L\Phi_L\mathfrak{V}\Phi_L\Phi\Psi\Phi_L = l\Phi_L.$$

---

[1]) Nous appelons *ligne singulière* du complexe la droite intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe.

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\Phi\mathrm{M} = 0,$$

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{M}\Psi\Phi\mathrm{M} = 0,$$

d'où

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{L}\Psi\Phi\mathrm{L} = 0,$$

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\Phi\mathrm{L} = 0,$$

équations identiques aux équations (3) qui déterminent la direction de x. Donc le point X_1 est situé sur le vecteur OX.

14. Les équations

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{L} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{M} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{L}\Phi\mathrm{M} = 0,$$

dont la dernière résulte immédiatement de l'expression de $\Phi\mathrm{M}$, montrent que les vecteurs L, M et x (ou x_1) sont conjugués par rapport à la quadrique (S), qui a pour équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x} = 1.$$

On a aussi

$$\mathfrak{S}\Phi\mathrm{M}\Psi\Phi\mathrm{L} = \mathfrak{S}\mathrm{M}\Phi\Psi\Phi\mathrm{M} = 0,$$

ce qui montre que les vecteurs L et M sont aussi conjugués par rapport à la quadrique (S_1), qui a pour équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\Psi\Phi\mathrm{x} = m_\Phi.$$

Si donc on mène un plan quelconque par l'origine, les diamètres conjugués communs aux sections faites par ce plan dans les quadriques (S) *et* (S_1) *donneront les directions des vecteurs* L *et* M, *et le diamètre conjugué de ce plan par rapport à* (S) *donnera la direction des vecteurs* x *et* x_1.

15. Si maintenant, dans l'équation

$$\Phi\mathrm{M} = \mathfrak{V}\mathrm{x}_1\Psi\mathfrak{V}\mathrm{M}\mathrm{x}_1,$$

nous remplaçons M par sa valeur en fonction de L, il vient

$$m_\Phi\mathfrak{V}\mathrm{L}\Psi\Phi\mathrm{L} = \mathfrak{V}\mathrm{x}_1\Psi\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\Phi\mathrm{L}\Phi\Psi\Phi\mathrm{L}.\mathrm{x}_1) = -\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\Phi\Psi\Phi\mathrm{L}\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{x}_1\Psi\Phi\mathrm{L}.\Phi\mathrm{x}_1);$$

opérons avec $\mathfrak{V}\Phi x_1$ et nous aurons

$$m_\Phi \mathfrak{V}(\Phi x_1 \mathfrak{V} L \Psi \Phi L) = \mathfrak{S} x_1 \Phi \Psi \Phi L \mathfrak{V}(\mathfrak{V} x_1 \Psi \Phi L . \Phi x_1),$$

ou enfin, en développant le premier membre et supprimant le facteur commun $\mathfrak{S} x_1 \Phi \Psi \Phi L$,

$$m_\Phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V} x_1 \Psi \Phi L . \Phi x_1).$$

Ainsi donc l'équation vectorielle de la surface de Kummer se présente sous l'une ou l'autre des formes

$$\Phi L = \mathfrak{V} x \Psi L x, \tag{4}$$

$$m_\Phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V} x_1 \Psi \Phi L . \Phi x_1). \tag{5}$$

Pour une même valeur de L, ces équations donnent deux points situés sur le même vecteur et appartenant à deux nappes différentes de la surface.

16. L'équation (5) développée donne

$$m_\Phi L = \Psi \Phi L \mathfrak{S} x_1 \Phi x_1 - x_1 \mathfrak{S} x_1 \Phi \Psi \Phi L;$$

et si nous opérons sur cette équation avec ΦL, il vient

$$m_\Phi \mathfrak{S} L \Phi L = \mathfrak{S} x_1 \Phi x_1 \mathfrak{S} L \Phi \Psi \Phi L. \tag{6}$$

Ceci posé, soient OL, OM; OL′, OM′ les demi-diamètres conjugués communs en direction des sections faites dans les quadriques (S) et (S_1)

par un plan central quelconque; ON le demi-diamètre de (S) conjugué à ce plan.

Nous aurons

$$\mathfrak{S}_{L\Phi L} = 1,$$

$$\mathfrak{S}_{X_1\Phi X_1} = \frac{\overline{ON_1}^2}{\overline{ON}^2},$$

$$\mathfrak{S}_{L\Phi\Psi\Phi L} = m_\Phi \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OL'}^2}.$$

Donc l'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$1 = \frac{OX_1}{ON} \times \frac{OL}{OL'},$$

ou

$$OX_1 = ON \times \frac{OL'}{OL}.$$

On aura de même

$$OX = ON \times \frac{OM'}{OM}.$$

On a ainsi pour la surface de Kummer la définition géométrique suivante :

Soient données deux quadriques concentriques (S) et (S_1); *on mène un plan central quelconque, et, dans ce plan, les diamètres conjugués* OL *et* OM, OL′ *et* OM′, *communs en direction, des sections faites par ce plan dans les deux surfaces. Sur le diamètre* ON *de la surface* (S) *conjugué par rapport au plan, on prend de part et d'autre du centre*

$$OX = ON\frac{OM'}{OM}, \quad OX_1 = ON\frac{OL'}{OL};$$

le lieu des points X *et* X_1 *est une surface de Kummer.*

16. *Cônes du complexe; directions conjuguées communes à un cône du complexe et à la surface* (S). — On peut encore arriver à cette construction géométrique très simple de la surface (K) par les considérations suivantes.

Le cône du complexe qui a son sommet au point l_N du vecteur ON

a pour équation

$$\mathfrak{S}_X \Theta_X = 0,$$

en posant

$$\Theta_X = \Phi_X - l^2 \mathfrak{V}_N \Psi \mathfrak{V}_{XN},$$

et les directions conjuguées communes à ce cône et à la surface (S) sont les racines de l'équation

$$\Theta_X = \tau \Phi_X,$$

ou bien

$$(7) \qquad \Phi_X - l^2 \mathfrak{V}_N \Psi \mathfrak{V}_{XN} = \tau \Phi_X.$$

Pour $X = N$, on a

$$\Theta_N = \Phi_N.$$

Donc N est une solution de l'équation (7), et la valeur correspondante de τ est $\tau = 1$.

Soient L et M les deux autres solutions (supposées réelles) de cette équation, L et M étant, comme ci-dessus, des points de la surface (S).

En faisant $X = M$ dans l'équation (7), on aura

$$\Phi_M - l^2 \mathfrak{V}_N \Psi \mathfrak{V}_{MN} = \tau_2 \Phi_M.$$

Or, L, M et N étant trois demi-diamètres conjugués de (S), on aura

$$\mathfrak{V}_{MN} = \mathfrak{S}_{LMN} \Phi_L,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$(8) \qquad (1 - \tau_2) \Phi_M = l^2 \mathfrak{S}_{LMN} \mathfrak{V}_N \Psi \Phi_L,$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{S} \Phi_M \Psi \Phi_L = \mathfrak{S}_M \Phi \Psi \Phi_L = 0.$$

Donc L et M sont parallèles aux diamètres conjugués communs aux sections faites dans les surfaces (S) et (S_1) par le plan diamétral conjugué de ON par rapport à la quadrique (S).

Opérons maintenant sur l'équation (8) avec $\mathfrak{S}_M$, et nous aurons

$$1 - \mathfrak{r}_2 = l^2 (\mathfrak{S}_{LMN})^2 \mathfrak{S}_L \Phi^M \Gamma \Phi_L,$$

ou bien, en se reportant à la figure,

$$1 - \mathfrak{r}^2 = l^2 \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OL'}^2},$$

d'où

$$\mathfrak{r}_2 = 1 - l^2 \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OL'}^2}.$$

On voit donc que, pour

$$l = \frac{OL'}{OL},$$

on aura $\mathfrak{r}_2 = 0$, et le point l_N correspondant est le point X_1 déterminé par l'équation

$$OX_1 = ON \times \frac{OL'}{OL}.$$

Le cône du complexe qui a son sommet en ce point se réduit à deux plans, dont l'intersection est parallèle à OM.

On trouvera de même

$$\mathfrak{r}_1 = 1 - l^2 \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2},$$

et l'on aura un second point de la surface de Kummer pour

$$l = \frac{OM'}{OM},$$

c'est-à-dire en prenant sur ON

$$OX = ON \times \frac{OM'}{OM}.$$

Le cône qui a son sommet au point X se réduit à deux plans dont l'intersection est parallèle au vecteur OL.

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus précédemment.

17. *Formes diverses de l'équation algébrique de la surface de Kummer.* — Il est facile d'obtenir l'équation algébrique de la surface K à l'aide de l'une ou l'autre de ses équations vectorielles. Soit, par exemple, la première

$$(9)\qquad \Phi L = \mathfrak{V}X\Psi\mathfrak{V}LX,$$

et posons

$$\Psi\mathfrak{V}LX = Q,$$

d'où

$$\mathfrak{V}LX = \Psi^{-1}Q.$$

Si nous opérons sur l'équation (9) avec $\mathfrak{V}.\Phi X$, nous aurons

$$m_\Phi \Phi^{-1}\mathfrak{V}LX = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}XQ\Phi X),$$

équation qui se prête sans peine aux transformations suivantes :

$$m_\Phi \Phi^{-1}\Psi^{-1}Q = Q\mathfrak{S}X\Phi X - X\mathfrak{S}Q\Phi X,$$
$$(\mathfrak{S}X\Phi X - m_\Phi \Phi^{-1}\Psi^{-1})Q = X\mathfrak{S}Q\Phi X,$$
$$Q = \mathfrak{S}Q\Phi X(\mathfrak{S}X\Phi X - m_\Phi \Phi^{-1}\Psi^{-1})^{-1}X.$$

Opérons enfin avec $\mathfrak{S}.\Phi X$ et nous aurons, après avoir supprimé le facteur $\mathfrak{S}Q\Phi X$,

$$\mathfrak{S}\Phi X(\mathfrak{S}X\Phi X - m_\Phi \Phi^{-1}\Psi^{-1})^{-1}X = 1,$$

ou bien

$$(10)\qquad \mathfrak{S}X(\Phi^{-1}\mathfrak{S}X\Phi X\, m_\Phi(\Phi\Psi\Phi)^{-1})^{-1}X = 1,$$

première forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer.

18. L'équation (9) peut encore se mettre sous la forme

$$\Phi L = m_\Psi \mathfrak{V}(X\mathfrak{V}\Psi^{-1}L\Psi^{-1}X),$$

et l'on aura les transformations suivantes :

$$\Phi L = m_\Psi(\Psi^{-1}L\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X - \Psi^{-1}X\mathfrak{S}X\Psi^{-1}L),$$

$$(m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X\Psi^{-1} - \Phi)L = m_\Psi\Psi^{-1}X\mathfrak{S}X\Psi^{-1}L,$$

$$L = m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}L(m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X\Psi^{-1} - \Phi)^{-1}\Psi^{-1}X,$$

$$L = m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}L(m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X - \Psi\Phi)^{-1}X,$$

et en opérant avec $\mathfrak{S}.\Phi X$ et se rappelant qu'on a

$$\mathfrak{S}L\Phi X = 0,$$

$$(11) \qquad \mathfrak{S}X(m_\Psi\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X\Phi^{-1} - \Psi)^{-1}X = 0,$$

autre forme de l'équation de la surface de Kummer.

19. Prenons maintenant la seconde équation vectorielle

$$m_\Phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}X\Psi\Phi L.\Phi X).$$

Développée, elle donne successivement

$$m_\Phi L = \mathfrak{S}X\Phi X\Psi\Phi L - \mathfrak{S}X\Phi\Psi\Phi L.X),$$

$$(\mathfrak{S}X\Phi X\Psi\Phi - m_\Phi)L = \mathfrak{S}X\Phi\Psi\Phi L.X,$$

$$L = \mathfrak{S}X\Phi\Psi\Phi L(\mathfrak{S}X\Phi X\Psi\Phi - m_\Phi)^{-1}X,$$

et, en opérant avec $\mathfrak{S}.\Phi X$,

$$(12) \qquad \mathfrak{S}X(\mathfrak{S}X\Phi X\Psi - m_\Phi\Phi^{-1})^{-1}X = 0,$$

troisième forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer.

20. Les équations (11) et (12) se déduisent l'une de l'autre par le simple changement de Φ et Ψ en Ψ^{-1} et Φ^{-1} respectivement.

Donc les deux complexes qui ont pour équations

$$(13) \qquad \mathfrak{S}U\Phi U - \mathfrak{S}V\Psi V = 0$$

et

$$(14) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{U}\Psi^{-1}\mathrm{U} - \mathfrak{S}\mathrm{V}\Phi^{-1}\mathrm{V} = 0$$

ont la même surface singulière.

On aurait pu d'ailleurs le reconnaître directement de la manière suivante :

L'équation vectorielle

$$m_\Phi \mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{X}\Psi\Phi\mathrm{L}.\Phi\mathrm{X}$$

donne successivement

$$\Phi\mathrm{L} = \mathfrak{V}(\Phi^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{X}_1\Psi\Phi\mathrm{L}.\mathrm{X}_1),$$

$$m_\Phi\Phi\mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\Phi\mathrm{X}_1\Phi\Psi\Phi\mathrm{L}\mathrm{X}_1),$$

et si maintenant nous posons

$$\mathrm{L} = \Phi^{-1}\Psi^{-1}\mathrm{L}_1,$$

il viendra

$$\Psi^{-1}\mathrm{L}_1 = \mathfrak{V}(\mathrm{X}_1\Phi^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{L}_1\mathrm{X}_1),$$

équation vectorielle qui ne diffère de l'équation (4) qu'en ce que les fonctions Φ et Ψ sont remplacés par Ψ^{-1} et Φ^{-1} respectivement.

En faisant cette même transformation dans l'équation (10), on obtient une quatrième forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer,

$$(15) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{X}\left(\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}\Psi - \frac{\Psi\Phi\Psi}{m_\Psi}\right)^{-1}\mathrm{X} = 1.$$

21. Il est facile de développer les équations algébriques obtenues ci-dessus pour la surface de Kummer.

Soit, par exemple, l'équation (12),

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}(\mathfrak{S}\mathrm{X}\Phi\mathrm{X}\Psi - m_\Phi\Phi^{-1})^{-1}\mathrm{X} = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\Phi\left(\Psi\Phi - \frac{m_\Phi}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Phi\mathrm{X}}\right)^{-1}\mathrm{X} = 0.$$

On a d'ailleurs, à un facteur près,

$$\left(\Psi\Phi - \frac{m_\Phi}{\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x}}\right)^{-1} = \frac{m_\Phi^2}{(\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x})^2} - \frac{m_\Phi}{\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x}}\left[(m_2, \Psi\Phi - \Psi\Phi) + (m, \Psi\Phi)\right]\Phi^{-1}\Psi^{-1},$$

en désignant par $(m, \Psi\Phi)$ et $(m_2, \Psi\Phi)$ les invariants m et m_2 de la fonction $\Psi\Phi$.

En portant cette expression dans l'équation de la surface, celle-ci devient

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} & m_\Phi^2 - m_\Phi\left[(m_2, \Psi\Phi)\,\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x} - \mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\Psi\Phi\mathrm{x}\right] \\ & \qquad + (m, \Psi\Phi)\,\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x}\,\mathfrak{S}\mathrm{x}\Psi^{-1}\mathrm{x} = 0. \end{aligned}\right.$$

On transformerait de même les autres équations de la surface.

22. *Plans diamétraux conjugués de la surface de Kummer. Sections de la surface par ces plans.* — Soit x un vecteur ayant même plan conjugué par rapport aux quadriques (S) et (S_1); on pourra poser

$$(1)\qquad \Phi\Psi\Phi\mathrm{x} = s\Phi\mathrm{x}.$$

Mais on tire immédiatement de cette équation

$$(2)\qquad \Phi\mathrm{x} = s\Psi^{-1}\mathrm{x}.$$

Donc un vecteur x, qui satisfait à l'équation (1), a aussi le même plan conjugué par rapport à la quadrique (S) et à la caractéristique (S_2). En d'autres termes, les trois surfaces (S), (S_1) et (S_2) ont un système de trois plans diamétraux conjugués communs : deux de ces plans peuvent d'ailleurs devenir imaginaires.

La forme même de l'équation (16) de la surface (K) montre que ces plans sont des plans diamétraux de cette surface elle-même.

23. Soient alors OA, OB, OC les demi-diamètres conjugués supposés réels de la surface (S), dont les directions sont aussi conjuguées par rapport à (S_1) et (S_2).

On aura

$$\Phi_A = \frac{\mathfrak{V}_{BC}}{\mathfrak{S}_{ABC}}, \quad \Phi_B = \frac{\mathfrak{V}_{CA}}{\mathfrak{S}_{ABC}}, \quad \Phi_C = \frac{\mathfrak{V}_{AB}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

d'où

$$\Phi_X = \frac{\mathfrak{S}_{BCX}\mathfrak{V}_{BC} + \mathfrak{S}_{CAX}\mathfrak{V}_{CA} + \mathfrak{S}_{ABX}\mathfrak{V}_{AB}}{(\mathfrak{S}_{ABC})^2}.$$

De sorte que l'équation de la surface (S) peut s'écrire sous la forme

$$(\mathfrak{S}_{BCX})^2 + (\mathfrak{S}_{CAX})^2 + (\mathfrak{S}_{ABX})^2 = (\mathfrak{S}_{ABC})^2.$$

On a d'ailleurs

$$m_\Phi = \frac{\mathfrak{S}\Phi_A\Phi_B\Phi_C}{\mathfrak{S}_{ABC}} = \frac{1}{(\mathfrak{S}_{ABC})^2}.$$

Ensuite on pourra poser

$$\Phi\Psi^{-1}\Phi_A = m_\Phi s_1 \Phi_A = m_\Phi \frac{s_1 \mathfrak{V}_{BC}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

$$\Phi\Psi^{-1}\Phi_B = m_\Phi \frac{s_2 \mathfrak{V}_{CA}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

$$\Phi\Psi^{-1}\Phi_C = m_\Phi \frac{s_3 \mathfrak{V}_{AB}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

d'ou

$$\Phi\Psi^{-1}\Phi_X = m_\Phi \frac{s_1 \mathfrak{S}_{BCX}\mathfrak{V}_{BC} + s_2 \mathfrak{S}_{CAX}\mathfrak{V}_{CA} + s_3 \mathfrak{S}_{ABX}\mathfrak{V}_{AB}}{(\mathfrak{S}_{ABC})},$$

en sorte que l'équation de la quadrique (S_1) pourra se mettre sous la forme

$$s_1 \mathfrak{S}^2_{BCX} + s_2 \mathfrak{S}^2_{CAX} + s_3 \mathfrak{S}^2_{ABX} = \mathfrak{S}^2_{ABC}.$$

Si OA_1, OB_1, OC_1 sont les demi-diamètres de cette surface dirigés suivant OA, OB, OC, on aura

$$OA = OA_1\sqrt{s_1}, \quad OB = OB_1\sqrt{s_2}, \quad OC = OC_1\sqrt{s_3}.$$

On a encore

$$\Phi_A = m_\Phi s_1 \Psi^{-1}{}_A,$$

d'ou

$$\Psi^{-1}{}_A = \frac{\mathfrak{V}_{BC}}{m_\Phi s_1 \mathfrak{S}_{ABC}} = \frac{\mathfrak{S}_{ABC}}{s_1}\mathfrak{V}_{BC}.$$

et de même

$$\Psi^{-1}B = \frac{S_{ABC}}{s_2}\mathfrak{V}_{CA}, \quad \Psi^{-1}C = \frac{S_{ABC}}{s_3}\mathfrak{S}_{AB},$$

d'où

$$\Psi^{-1}X = \frac{S_{BCX}\mathfrak{V}_{BC}}{s_1} + \frac{S_{CAX}\mathfrak{V}_{CA}}{s_2} + \frac{S_{ABX}\mathfrak{V}_{AB}}{s_3},$$

et l'équation de la surface caractéristique (S_2) pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{(S_{BCX})^2}{s_1} + \frac{(S_{CAX})^2}{s_2} + \frac{(S_{ABX})^2}{s_3} = (\mathfrak{S}_{ABC})^2.$$

Si OA_2, OB_2 et OC_2 sont les demi-diamètres conjugués de cette surface dirigés suivant OA, OB et OC respectivement, on aura

$$OA_2 = OA\sqrt{s_1},$$

$$OB_2 = OB\sqrt{s_2},$$

$$OC_2 = OC\sqrt{s_3},$$

d'où

$$OA_1 \times OA_2 = \overline{OA}^2,$$

$$OB_1 \times OB_2 = \overline{OB}^2,$$

$$OC_1 \times OC_2 = \overline{OC}^2.$$

On aura d'ailleurs

$$m_\Psi = \frac{1}{m_{\Psi^{-1}}} = \frac{S_{ABC}}{S\Psi^{-1}A\,\Psi^{-1}B\,\Psi^{-1}C} = \frac{s_1 s_2 s_3}{(S_{ABC})^2}.$$

Enfin, on reconnait sans aucune difficulté que (S_1) est la polaire réciproque de (S_2) par rapport à (S).

24. Ceci posé, l'équation vectorielle (4) du § XV peut s'écrire sous la forme

$$\Phi L = m_\Psi \mathfrak{V}(X\mathfrak{V}\Psi^{-1}L\,\Psi^{-1}X),$$

ou bien, en développant le second membre,

$$\Phi L = m_2(\mathfrak{S}X\Psi^{-1}X\,\Psi^{-1}L - \mathfrak{S}X\Psi^{-1}L\,\Psi^{-1}X).$$

Si nous faisons maintenant

$$L = A$$

dans cette équation, il vient

$$\Phi_A = m_\Psi(\mathfrak{S}_X \Psi^{-1}{}_X \Psi^{-1}{}_L - \mathfrak{S}_X \Psi^{-1}{}_A \Psi^{-1}{}_X),$$

ou, en tenant compte des notations et résultats du paragraphe précédent,

$$\Phi_A = m_\Psi \frac{\mathfrak{S}_X \Psi^{-1}{}_X}{s_1 m_\Phi} \Phi_A - m_\Psi \frac{\mathfrak{S}_{XBC}}{s_1 m_\Phi} \Psi^{-1}{}_X.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a séparément

$$\mathfrak{S}_{XBC} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_X \Psi^{-1}{}_X = \frac{s_1 m_\Phi}{m_\Psi} = \frac{(\mathfrak{S}_{ABC})^2}{s_2 s_3},$$

équations d'une conique située dans le plan OBC et semblable à la section faite par ce plan dans la surface (S_2). Les demi-diamètres de cette courbe dirigés suivant OB et OC ont respectivement pour valeurs

$$\frac{OB}{\sqrt{s_3}} = \frac{OB_2}{\sqrt{s_2 s_3}} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{\sqrt{s_2}} = \frac{OC_2}{\sqrt{s_2 s_3}}.$$

25. Prenons maintenant l'équation

$$m_\Phi{}_L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X \Psi\Phi_{LA} \Phi_X)$$

et faisons dans cette équation $x = A$; il viendra

$$m_\Phi{}_A \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X \Psi\Phi_A \Phi_X).$$

Or on a

$$\Psi\Phi_A = m_\Phi s_1 A,$$

et l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$A = s_1 \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{XA} \Phi_X) = s_1(\mathfrak{S}_X \Phi_{X,A} - \mathfrak{S}_X \Phi_{A,X}),$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mathfrak{S}_X \Phi_A = \mathfrak{S}_X BC = 0,$$

$$s_1 \mathfrak{S}_X \Phi_X = 1,$$

équations d'une seconde conique située dans le plan OBC, et semblable à la section faite par ce plan dans la quadratique (S). Les demi-diamètres de cette courbe dirigés suivant OB et OC ont respectivement pour valeurs

$$\frac{OB}{\sqrt{s_1}} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{\sqrt{s_1}}.$$

Le plan diamétral OBC coupe donc la surface (K) suivant deux coniques; il en est de même évidemment pour les deux autres plans diamétraux conjugués de la surface.

26. Les deux coniques, sections de la surface par l'un de ses plans diamétraux, se coupent en quatre points, qui sont des points coniques de la surface.

La surface (K) a ainsi douze points coniques à distance finie, situés quatre par quatre dans ses trois plans diamétraux conjugués.

L'équation (16) du n° **24** montre, en outre, que l'intersection de la surface avec le plan situé tout entier à l'infini se compose également de deux courbes : ce sont les sections à l'infini des cônes asymptotes des quadratiques (S) et (S_2). Ces courbes se coupent elles-mêmes en quatre points qui complètent les seize points doubles de la surface.

Nous reviendrons plus loin sur la détermination des points doubles à distance finie.

27. *Plans tangents de la surface* (K) *aux points* X *et* X_1. — Cherchons le plan tangent au point x déterminé par l'équation

$$\Phi_L = \mathfrak{V}_{(X} \Psi \mathfrak{V}_{LX)}.$$

Opérons avec $\mathfrak{S}_L$, et nous aurons

$$\mathfrak{S}_L \Phi_L = \mathfrak{S}\mathfrak{V}_{LX} \Psi \mathfrak{V}_{LX}.$$

Si nous différentions cette équation, il vient

$$\mathfrak{S}\, d_{\mathrm{L}}\, \Phi_{\mathrm{L}} = \mathfrak{S}\mathfrak{V}\, d_{\mathrm{LX}}\, \Psi\, \mathfrak{V}_{\mathrm{LX}} + \mathfrak{S}\mathfrak{V}_{\mathrm{L}}\, d_{\mathrm{X}}\, \Psi\, \mathfrak{V}_{\mathrm{LX}}$$

$$= \mathfrak{S}\, d_{\mathrm{L}}\, \Phi_{\mathrm{L}} + \mathfrak{S}\mathfrak{V}_{\mathrm{L}}\, d_{\mathrm{X}}\, \Psi\, \mathfrak{V}_{\mathrm{LX}},$$

d'où

$$\mathfrak{S}\mathfrak{V}\, d_{\mathrm{XL}}\, \Phi\, \mathfrak{V}_{\mathrm{LX}} = 0.$$

Si donc P est un vecteur parallèle à la normale au point X, on aura

$$(1) \qquad \mathrm{P} \parallel \mathfrak{V}(\mathrm{L}\Psi\, \mathfrak{V}_{\mathrm{LX}}) \parallel \mathfrak{V}_{\mathrm{L}}\Psi\, \Phi_{\mathrm{M}},$$

d'où

$$\mathfrak{S}\mathrm{PL} = 0;$$

donc le plan tangent au point X contient la parallèle à OL mené par ce point, c'est-à-dire la droite singulière du complexe, intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe pour ce point.

Mais la relation vectorielle (1) peut encore se mettre sous la forme

$$\Phi^{-1}\mathrm{P} \parallel \Phi^{-1}\mathfrak{V}_{\mathrm{L}}\, \Psi\Phi_{\mathrm{M}} \parallel \mathfrak{V}\Phi_{\mathrm{L}}\, \Phi\Psi\, \Phi_{\mathrm{M}}.$$

Or $\Phi^{-1}\mathrm{P}$ est le diamètre conjugué par rapport à (S) du plan tangent cherché. Donc *le diamètre conjugué par rapport à* (S) *du plan tangent de la surface* (K) *au point* X *est parallèle à la trace du plan tangent à la surface* (S_1) *au point* M′ *sur le plan* MON (*fig.* 1).

De même le plan tangent en X_1 contient la droite singulière du complexe déterminée par ce point, et son diamètre conjugué par rapport à (S) est parallèle à la trace du plan tangent en L′ à la surface (S_1) sur le plan LON.

28. *Points coniques; cônes des tangentes en ces points.* — En se reportant à la construction géométrique de la surface (K), qui a fait l'objet du § **16**, on voit que, si un plan central coupe les surfaces (S) et (S_1) suivant deux coniques semblables, le système des diamètres conjugués communs à ces deux courbes sera complètement indéterminé. On pourra donc prendre pour OL ou OM un vecteur quelconque situé dans le plan de ces coniques, et le rapport OL : OL′ restera

constant. Ainsi, aux vecteurs en nombre infini situés dans le plan en question correspondra un point unique de la surface (K) : c'est un point double de cette surface, et les considérations qui précèdent montrent que la recherche des points doubles de la surface (K) situés à distance finie revient à celle des plans centraux qui coupent (S) et (S_1) suivant deux coniques semblables.

29. La solution de ce problème est des plus simples. En effet, si un plan coupe les quadriques (S) et (S_1) suivant deux coniques semblables, on pourra déterminer la constante l de telle sorte que l'intersection de (S_1) avec la quadratique semblable à (S) ayant pour équation

$$l\,\mathfrak{S}\,X\,\Phi X = 1$$

se compose de deux courbes planes, c'est-à-dire de telle sorte que le cône

$$\mathfrak{S}\,X\left(l\Phi - \frac{\Phi\Psi\Phi}{m_\Phi}\right)X = 0$$

se réduise à un système de deux plans. Mais l'équation de ce cône peut s'écrire sous la forme

$$(l - s_1)(\mathfrak{S}\,BCX)^2 + (l - s_2)(\mathfrak{S}\,CAX)^2 + (l - s_3)(\mathfrak{S}\,ABX)^2 = 0,$$

et, pour qu'il se réduise à un système de deux plans, il faut que l soit égal à l'une ou l'autre des trois constantes s, s_1 et s_2.

Soit, par exemple, $l = s_1$; l'équation ci-dessus devient

$$(s_1 - s_2)(\mathfrak{S}\,CAX)^2 + (s_1 - s_3)(\mathfrak{S}\,ABX)^2 = 0,$$

et elle représente un système de deux plans passant par le diamètre OA.

On trouvera de même deux plans analogues passant par chacun des deux autres diamètres conjugués de la surface.

30. Il est facile de reconnaître analytiquement que, lorsque le vecteur L se meut dans l'un des plans que nous venons de déterminer, les points correspondants X ne changent pas, et que ce sont deux points doubles de la surface de Kummer.

En effet, de l'équation vectorielle

$$\Phi \mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathrm{X}\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{L}\,\mathrm{X}),$$

on tire

$$\mathrm{X} \parallel \mathfrak{V}(\Phi\,\mathrm{L}\,\mathfrak{V}\,\Psi\,\Phi\,\mathrm{L})$$

ou

$$\mathrm{X} \parallel \mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{L}\,\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{L} - \Psi\Phi\,\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{L}\,\Phi\,\mathrm{L},$$

et

$$(1) \qquad \Phi\mathrm{X} \parallel \Phi\,\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{L}\,\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{L} - \Phi\Psi\Phi\,\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{L}\,\Phi\,\mathrm{L}.$$

Mais l'équation de l'ensemble de deux des plans qui coupent les quadratiques (S) et (S_1) suivant deux courbes semblables étant

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,(\Phi\Psi\Phi - m_\Phi s\Phi)\,\mathrm{X} = 0,$$

on peut poser, si les plans considérés sont réels,

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,(\Phi\Psi\Phi - m_\Phi s\Phi)\,\mathrm{X} = 2m_\Phi g\,\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\mathrm{X}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F}\,\mathrm{X},$$

E et F étant les vecteurs unitaires normaux à ces plans, et l'équation

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{X} = m_\Phi$$

de la surface (S_1) pourra s'écrire sous la forme

$$s\,\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi\,\mathrm{X} + 2g\,\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\mathrm{X}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F}\,\mathrm{X} = 1,$$

et l'on aura

$$\frac{1}{m_\Phi}\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{X} = s\,\Phi\,\mathrm{X} + g(\mathrm{F}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\mathrm{X} + \mathrm{E}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F}\,\mathrm{X}).$$

Soit maintenant L un vecteur de la surface (S) situé dans le plan $\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\mathrm{X} = 0$; on aura

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\mathrm{L} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{m_\Phi}\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{L} = s\,\Phi\,\mathrm{L} + g\,\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F}\,\mathrm{L},$$

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\,\mathrm{L}\,\Phi\Psi\Phi\,\mathrm{L} = m_\Phi s\,\mathfrak{S}\,\mathrm{E}\,\Phi\,\mathrm{L} = m_\Phi s.$$

L'équation (1) donnera donc

$$\Phi X \parallel s\Phi L - \frac{1}{m_\Phi}\Phi\Psi\Phi L \parallel E,$$

ou

$$X \parallel \Phi^{-1} E.$$

Ainsi le point X est bien situé, quel que soit L, sur le diamètre conjugué par rapport à (S) du plan dans lequel se meut ce vecteur.

On a d'ailleurs [équation (6) du § **16**]

$$\mathfrak{S} X \Phi X = \frac{m_\Phi \mathfrak{S} M \Phi M}{\mathfrak{S} M \Phi\Psi\Phi\Psi} = \frac{1}{s},$$

en vertu de l'équation (2); donc le point X est bien un point fixe.

31. Cherchons maintenant l'équation du cône décrit par la normale à la surface (K) en ce point.

Si Y est l'une des normales, on aura

$$Y \parallel \mathfrak{V} M \Psi\Phi L \parallel \mathfrak{V}(\mathfrak{V} E \Phi L . \Psi\Phi L),$$

ou

$$Y \parallel \Phi L \mathfrak{S} E \Psi\Phi L - E \mathfrak{S} L \Phi\Psi\Phi L.$$

Or on a

$$\mathfrak{S} E \Psi\Phi L = m_\Phi g \mathfrak{S} FL \mathfrak{S} E \Phi^{-1} E,$$

$$\mathfrak{S} L \Phi\Psi\Phi L = m_\Phi s;$$

donc on a

$$Y \parallel g \mathfrak{S} FL \mathfrak{S} E \Phi^{-1} E \Phi L - sE,$$

et l'on pourra poser

$$Y = k(g \mathfrak{S} FL \mathfrak{S} E \Phi^{-1} E \Phi L - sE).$$

Opérons sur cette équation avec $\mathfrak{S} . L$ et $\mathfrak{S} . \Phi^{-1} E$, et nous aurons

$$\mathfrak{S} LY = kg \mathfrak{S} FL \mathfrak{S} E \Phi^{-1} E,$$

$$\mathfrak{S} Y \Phi^{-1} E = -ks \mathfrak{S} E \Phi^{-1} E,$$

d'où, en éliminant k,

$$s\,\mathfrak{S}_{LY} + g\,\mathfrak{S}_{FL}\,{}_{Y}\mathfrak{S}\Phi^{-1}{}_{E} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{S}_{EL} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{EY}\Phi_{L} = 0.$$

En éliminant enfin L entre les équations qui précèdent, il vient pour l'équation du cône cherché

$$\mathfrak{S}_{E}\Phi\mathfrak{V}_{EY}(sY + gF\,\mathfrak{S}_{Y}\Phi^{-1}{}_{E}) = 0,$$

ou

$$s\,\mathfrak{S}\mathfrak{V}_{EY}\Phi\mathfrak{V}_{EY} + g\,\mathfrak{S}_{Y}\Phi^{-1}{}_{E}\,\mathfrak{S}\mathfrak{V}_{EF}\Phi\mathfrak{V}_{EY} = 0,$$

équation d'un cône du second ordre, réciproque du cône enveloppe des plans tangents à la surface au point X.

32 On voit, d'après ce qui précède, que si x_1 est le vecteur de ce point singulier, l'expression

$$\Theta x = \Phi x - \mathfrak{V}(x_1)^{-1}\mathfrak{V}_{Xx_1}$$

se réduit à zéro pour tout vecteur situé dans le plan

$$(1) \qquad \mathfrak{S}_{EX} = 0.$$

La fonction Θx est alors une fonction linéaire à un seul terme, et le cône du complexe qui a son sommet au point singulier considéré se réduit à un système de deux plans coïncidents parallèles au plan (1). Ainsi donc les plans singuliers de la surface de Kummer sont les points pour lesquels le cône du complexe se réduit à un système de deux plans coïncidents.

33. *Équations tangentielles de la surface de Kummer.* — Soit

$$(1) \qquad \mathfrak{S}_{XY} = 1$$

l'équation d'un plan; nous appellerons, comme d'habitude, *équation tangentielle d'une surface* une équation en Y vectorielle ou algébrique, qui exprime que le plan (1) est tangent à la surface.

L'équation (1) représente le plan polaire du point Y par rapport à la sphère de rayon égal à l'unité ayant son centre à l'origine; donc, si dans l'équation tangentielle d'une surface on regarde Y comme le vecteur d'un point variable, elle représentera l'équation de la polaire réciproque de la surface considérée par rapport à la sphère unitaire.

34. Ceci posé, on sait que la surface (K) est l'enveloppe des plans dans lesquels la courbe du complexe se réduit à un système de deux points. Nous obtiendrons donc l'équation tangentielle de la surface de Kummer en écrivant la condition qui exprime que la courbe du complexe située dans le plan (1) se réduit à un système de deux points : cherchons cette condition.

Si dans l'équation du complexe

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{U}\,\Phi\,\mathrm{U} - \mathfrak{S}\,\mathrm{V}\,\Psi\,\mathrm{V} = 0,$$

nous remplaçons U par $\mathfrak{V}\,\mathrm{V}\,\mathrm{Y}$, il vient

$$(1)\qquad \mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{V}\,\mathrm{Y}\,\Phi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{V}\,\mathrm{Y} - \mathfrak{S}\,\mathrm{V}\,\Phi\,\mathrm{V} = 0,$$

et l'on sait que, si l'on regarde V comme un vecteur variable, cette équation représente le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine, et qui passe par la courbe du complexe située dans le plan (1).

Si cette courbe se réduit à un système de deux points, le cône (2) se réduira lui-même à un système de deux plans, c'est-à-dire que pour une valeur L convenablement choisie de V, on pourra poser

$$(3)\qquad \Psi\,\mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathrm{Y}\,\Phi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{L}\,\mathrm{Y}).$$

Cette équation est une équation tangentielle de la surface de Kummer. On voit qu'elle ne diffère de l'équation ponctuelle

$$\Phi\,\mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathrm{X}\,\Psi\,\mathfrak{V}\,\mathrm{L}\,\mathrm{X})$$

que par le changement de Φ en Ψ et de Ψ en Φ. Nous pourrons énoncer sans démonstration les résultats corrélatifs de ceux obtenus précédemment.

La surface a une seconde équation tangentielle vectorielle qu'on peut écrire sous la forme

$$m_\Psi \mathrm{L} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{Y}_1 \Phi \Psi \mathrm{L} \Psi \mathrm{Y}_1).$$

On peut encore, en utilisant une remarque faite précédemment (n° **20**), écrire les équations tangentielles de la surface sous la forme

$$\Phi^{-1}\mathrm{L} = \mathfrak{V}\mathrm{Y}^{-1}\Psi\mathrm{L}\mathrm{Y},$$
$$\mathrm{L} = m_\Phi \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{Y}_1 \Psi^{-1}\Phi^{-1}\mathrm{L}\Phi^{-1}\mathrm{Y}_1).$$

L'équation tangentielle algébrique peut s'écrire sous l'une ou l'autre des quatre formes

$$\mathfrak{S}\mathrm{Y}(\Psi^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{Y}\Psi\mathrm{Y} - m_\Psi \Psi^{-1}\Phi^{-1}\Psi^{-1})^{-1}\mathrm{Y} = 1,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{Y}\left(\mathfrak{S}\mathrm{Y}\Phi^{-1}\mathrm{Y}\Phi - \frac{1}{m_\Phi}\Phi\Psi\Phi\right)^{-1}\mathrm{Y} = 1,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{Y}(m_\Phi \mathfrak{S}\mathrm{Y}\Phi^{-1}\mathrm{Y}\Psi^{-1} - \Phi)^{-1}\mathrm{Y} = 0,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{Y}(\mathfrak{S}\mathrm{Y}\Psi\mathrm{Y}\Phi - m_\Psi \Psi^{-1})\mathrm{Y} = 0.$$

Et l'on voit que les surfaces singulières des complexes ayant pour équations

$$\mathfrak{S}\mathrm{U}\Phi\mathrm{U} - \mathfrak{S}\mathrm{V}\Psi\mathrm{V} = 0,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{U}\Phi^{-1}\mathrm{U} - \mathfrak{S}\mathrm{V}\Psi^{-1}\mathrm{V} = 0,$$

sont polaires réciproques par rapport à la sphère unitaire.

55. Il est facile de revenir de l'une des équations tangentielles de la surface à l'une de ses équations ponctuelles, ce qui fournira, pour le cas particulier que nous étudions, une démonstration du théorème général de Plücker cité plus haut, à savoir *que la surface lieu des points singuliers d'un complexe du second ordre est identique à la surface enveloppe de ses plans tangents singuliers.*

Prenons, par exemple, l'équation

$$(4)\qquad \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\Psi^{-1} - m_{\Psi}\Psi^{-1}\Phi^{-1}\Psi^{-1})^{-1}{}_{\mathrm{Y}} = 1,$$

et posons

$$(\mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\Psi^{-1} - m_{\Psi}\Psi^{-1}\Phi^{-1}\Psi^{-1})^{-1}{}_{\mathrm{Y}} = \Psi_{\mathrm{T}},$$

d'où

$$(5)\qquad {}_{\mathrm{Y}} = \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}.{}_{\mathrm{T}} - m_{\Psi}\Psi^{-1}\Phi^{-1}{}_{\mathrm{T}}.$$

L'équation (4) devient alors,

$$(6)\qquad \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{T}} = 1,$$

ou bien

$$(7)\qquad \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}} - m_{\Psi}\mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Phi^{-1}{}_{\mathrm{T}} = 1.$$

Si maintenant nous différentions l'équation (5), et que nous opérions sur le résultat avec $\mathfrak{S}.\Psi_{\mathrm{T}}$, il vient

$$\mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{T}} - 2\mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}d_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}} + m_{\Psi}\mathfrak{S}d_{\mathrm{T}}\Phi^{-1}{}_{\mathrm{T}} = 0.$$

Différentions également l'équation (7), et nous aurons

$$\mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}} + \mathfrak{S}_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}d_{\mathrm{T}}\Psi d_{\mathrm{T}} - m_{\Psi}\mathfrak{S}d_{\mathrm{T}}\Phi^{-1}{}_{\mathrm{T}} = 0.$$

En ajoutant les deux équations qui précèdent, il vient

$$\mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{T}} - \mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}\Psi_{\mathrm{Y}}\mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}} = 0,$$

ou

$$\mathfrak{S}d_{\mathrm{Y}}(\Psi_{\mathrm{T}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{Y}}) = 0.$$

On a d'ailleurs, quelle que soit la différentielle d_{Y},

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}d_{\mathrm{Y}} = 0;$$

donc, on peut poser

$$k_{\mathrm{X}} = \mathfrak{S}_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{T}}\Psi_{\mathrm{Y}} - \Psi_{\mathrm{T}}.$$

En opérant sur cette équation successivement avec $\mathfrak{S}.\mathrm{T}$ et $\mathfrak{S}.\Psi^{-1}\mathrm{X}$, elle donne, en tenant compte des résultats qui précèdent,

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\mathrm{T} = 0,$$

$$k\,\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{T}\Psi\mathrm{T}.$$

On a donc enfin

$$\frac{\mathfrak{S}\mathrm{T}\Psi\mathrm{T}}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}}\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{T}\Psi\mathrm{T}\Psi\mathrm{Y} - \Psi\mathrm{T},$$

d'où

$$\mathfrak{S}\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}} + \frac{\Psi\mathrm{T}}{\mathfrak{S}\mathrm{T}\Psi\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\Psi^{-1}\mathrm{X}}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi\mathrm{T}},$$

$$\mathfrak{S}\mathrm{Y}\Psi\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}} + \frac{1}{\mathfrak{S}\mathrm{T}\Psi\mathrm{T}}.$$

En portant ces valeurs de Y et de $\mathfrak{S}\mathrm{Y}\Psi\mathrm{Y}$ dans l'équation (5), il vient

$$\mathrm{X} = (\Psi - m_\Psi\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}\Phi^{-1})\mathrm{T},$$

d'où

$$\mathrm{T} = (\Psi - m_\Psi\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}\Phi^{-1})^{-1}\mathrm{X},$$

ou enfin, en opérant avec $\mathfrak{S}.\mathrm{X}$,

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}(m_\Psi\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi^{-1}\mathrm{X}\Phi^{-1} - \Psi)^{-1}\mathrm{X} = 0,$$

équation identique à l'équation (11) de la surface (K) du § 18.

56. La construction géométrique de la surface (K) à l'aide de ses plans tangents se déduit sans peine de ce que nous avons exposé plus haut relativement à la construction de la surface par points; il nous paraît donc inutile d'y insister.

Nous nous bornerons de même à faire remarquer que la surface a seize plans tangents singuliers, dont quatre passant par le centre, qui la touchent suivant des coniques. Ce sont les plans singuliers dans lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points coïncidents.

37 *Équation générale des complexes du second ordre qui ont la surface* (K) *pour surface singulière.* — La droite singulière du complexe

$$(1)\qquad \mathfrak{S}\, u\, \Phi u - \mathfrak{S}\, v\, \Phi v = 0,$$

qui touche la surface (K) au point M, n'est pas déterminée par la surface elle-même : c'est l'une quelconque de ses tangentes en ce point. Nous allons démontrer qu'on peut choisir à volonté une autre des tangentes de la surface (K) au point M et déterminer un nouveau complexe du second ordre ayant cette tangente pour ligne singulière et la surface (K) pour surface singulière, ou, en d'autres termes, que la surface (K) est la surface singulière d'un nombre infini de complexes du second ordre.

Soit (u, v) la droite singulière du complexe donné (1) qui correspond au point M de la surface (K). On reconnaît sans peine (§ 27) que le plan tangent au point M contient non seulement cette droite elle-même, mais encore celle qui a pour coordonnées $-\Psi v$ et Φu. De sorte qu'une tangente quelconque de la surface (K) au point M a pour coordonnées

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 = \sigma u - \Psi v, \\ v_1 = \sigma v + \Phi u, \end{cases}$$

σ étant un nombre arbitraire.

On a, d'ailleurs,

$$(3)\qquad \mathfrak{S}\, \Phi u\, \Psi v = 0;$$

on voit donc que les lignes singulières du complexe donné forment une *congruence* du quatrième ordre, représentée par l'ensemble des équations (1) et (3).

Ceci posé, les équations (2), résolues par rapport à u et v, donnent

$$(4)\qquad \begin{cases} u = (\Psi\Phi + \sigma^2)^{-1}(\Psi v_1 + \sigma u_1), \\ v = (\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}(\sigma v_1 - \Phi u_1). \end{cases}$$

L'équation (3) peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{u}(\Phi\Psi + \sigma^2)\mathrm{v} = 0.$$

Éliminons enfin u et v entre les équations (4) et (5), et nous aurons

$$\mathfrak{S}(\Psi\mathrm{v}_1 + \sigma\mathrm{u}_1)(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}(\sigma\mathrm{v}_1 - \Phi\mathrm{u}_1) = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}\sigma\mathfrak{S}\mathrm{u}_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\Phi\mathrm{u}_1 - \sigma\mathfrak{S}\mathrm{v}_1\Psi(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\mathrm{v}_1 \\ + \mathfrak{S}\Psi\mathrm{v}_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\Phi\mathrm{u}_1 - \sigma^2\mathfrak{S}\mathrm{u}_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\mathrm{v}_1 = 0,\end{aligned}$$

ou enfin, après des réductions faciles et en supprimant les indices,

$$(6) \quad \mathfrak{S}\mathrm{u}(\Phi\Psi+\sigma^2)^{-1}\Phi\mathrm{u} - 2\sigma\mathfrak{S}\mathrm{u}(\Phi\Psi+\sigma^2)^{-1}\mathrm{v} - \mathfrak{S}\mathrm{v}\Psi(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\mathrm{v} = 0.$$

Pour une valeur quelconque de σ, cette équation représente un complexe du second ordre qui a évidemment la surface (K) pour surface singulière.

L'équation (6) est du quatrième ordre par rapport à σ; donc il y a quatre complexes du second ordre ayant la surface (K) pour surface singulière, et contenant une droite donnée quelconque (u, v).

Pour $\sigma = \infty$, l'équation (6) devient

$$\mathfrak{S}\mathrm{u}\Phi\mathrm{v} - \mathfrak{S}\mathrm{v}\Psi\mathrm{v} = 0,$$

et, pour $\sigma = 0$,

$$\mathfrak{S}\mathrm{u}\Psi^{-1}\mathrm{u} - \mathfrak{S}\mathrm{v}\Phi^{-1}\mathrm{v} = 0.$$

Nous retrouvons ainsi le complexe donné et celui que nous avons déjà obtenu précédemment : la droite singulière relative à ce dernier complexe a évidemment pour coordonnées $-\Psi\mathrm{v}$ et $\Phi\mathrm{u}$.

38. Parmi les complexes en nombre infini que représente l'équation (6), il y en a six qui se réduisent à un complexe linéaire.

En effet, si on développe le premier membre de l'équation (6) en

suivant la marche indiquée au § 23, on obtient sans difficulté

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(\mathfrak{S}_{BCU})^2}{m_\Phi s_1+\sigma^2}+\frac{(\mathfrak{S}_{CAU})^2}{m_\Phi s_2+\sigma^2}+\frac{(\mathfrak{S}_{ABU})^2}{m_\Phi s_3+\sigma^2}\\ &\quad+\mathfrak{S}_{ABC}\left(\frac{\mathfrak{S}_{BCU}\,\mathfrak{S}_{AV}}{m_\Phi s_1+\sigma^2}+\frac{\mathfrak{S}_{CAU}\,\mathfrak{S}_{BV}}{m_\Phi s_2+\sigma^2}+\frac{\mathfrak{S}_{ABU}\,\mathfrak{S}_{CV}}{m_\Phi s_3+\sigma^2}\right)\\ &\qquad+\frac{s_1(\mathfrak{S}_{AV})^2}{m_\Phi s_1+\sigma^2}+\frac{s_2(\mathfrak{S}_{BV})^2}{m_\Phi s_2+\sigma^2}+\frac{s_3(\mathfrak{S}_{CV})^2}{m_\Phi s_3+\sigma^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$m_\Phi s_1+\sigma^2=0,$$

cette équation devient

$$(\mathfrak{S}_{BCU})^2-2\sigma\,\mathfrak{S}_{ABC}\,\mathfrak{S}_{BCU}\,\mathfrak{S}_{AV}+\sigma^2(\mathfrak{S}_{ABC})^2(\mathfrak{S}_{AV})^2=0,$$

ou

$$(\mathfrak{S}_{BCU}-\sigma\,\mathfrak{S}_{ABC}\,\mathfrak{S}_{AV})^2=0,$$

et l'on voit qu'elle représente l'ensemble de deux complexes linéaires réunis en un seul.

Les complexes linéaires qu'on obtient ainsi en remplaçant, dans l'équation (7), σ par l'une quelconque des valeurs tirées des équations

$$m_\Phi s_1+\sigma^2=0,$$
$$m_\Phi s_2+\sigma^2=0,$$
$$m_\Phi s_3+\sigma^2=0$$

sont ceux que M. Klein appelle les *complexes fondamentaux du système des complexes du second ordre* représentés par l'équation (6), et a l'aide desquels il démontre d'une manière très élégante les propriétés des complexes généraux du second ordre et de la surface de Kummer (*Mathematische Annalen*). Nous reviendrons dans un prochain Mémoire sur cette importante question.

39. Si nous supposons que l'une des fonctions Φ ou Ψ devienne égale à l'unité, les résultats qui précèdent fourniront une démonstration des propriétés bien connues de la surface des ondes de Fresnel :

l'équation vectorielle de cette surface se présente alors sous les formes simples

$$\Phi_{\mathrm{L}} = \mathfrak{V}_{\mathrm{X}}\,\mathfrak{V}_{\mathrm{LX}},$$

$$_{\mathrm{L}} = \mathfrak{V}_{\mathrm{X}}\,\Phi^{-1}\,\mathfrak{V}_{\mathrm{LX}},$$

qui ne nous paraissent pas avoir été remarquées.

Sur la propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion;

PAR M. GOUY.

Ce Mémoire forme la première Partie d'un travail qui a pour objet l'application de la théorie mathématique de la lumière à l'étude de la propagation et de l'analyse des rayons lumineux. Nous examinerons surtout en détail les particularités dues à l'existence de la dispersion dans les milieux optiques, supposés isotropes, dépourvus de pouvoir rotatoire, transparents et optiquement homogènes. Nous ne nous occuperons pas de la constitution intime de ces milieux, ni de la manière d'établir les équations différentielles de leurs petits mouvements, qui ont été l'objet de travaux nombreux et importants, et nous supposerons admise la forme linéaire de ces équations différentielles, ainsi que la forme de leurs intégrales simples, les géomètres et les physiciens paraissant d'accord sur ces deux points.

Ce Mémoire a pour objet l'étude des mouvements par ondes planes, et, en particulier, de ceux qui possèdent sensiblement la qualité que les physiciens nomment *homogénéité de la lumière*.

Il résultera de cet examen que, dans de tels mouvements, il y a deux vitesses à considérer, bien différentes l'une de l'autre dans les milieux doués d'une grande dispersion : la *vitesse individuelle des ondes*, égale au rapport de la longueur d'onde λ à la période vibratoire T, et la *vitesse de transport de l'intensité lumineuse*, égale à la dérivée de $\frac{1}{T}$ par rapport à $\frac{1}{\lambda}$. Cette dernière est la *vitesse de la lumière*, telle qu'on la me-

sure par les méthodes directes qui mettent à profit des variations d'intensité, et joue aussi un rôle important dans d'autres phénomènes [1].

§ I. — Formules générales.

1. Soit un milieu indéfini; x, y, z sont les coordonnées d'un point matériel quelconque de ce milieu à l'état de repos, par rapport à trois axes rectangulaires, et ξ, η, ζ les projections sur ces axes du déplacement très petit de ce point. On sait que, le milieu étant isotrope et dépourvu de pouvoir rotatoire, les équations différentielles des petits mouvements admettent pour intégrales [2] les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi = A_1 \sin(Kr - St) + B_1 \cos(Kr - St), \\ \eta = A_2 \sin(Kr - St) + B_2 \cos(Kr - St), \\ \zeta = A_3 \sin(Kr - St) + B_3 \cos(Kr - St), \end{cases}$$

en désignant par t le temps, par r la distance positive ou négative du point (x, y, z) à un plan fixe quelconque, et par A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, K et S des constantes quelconques, sous les conditions suivantes : les six premières sont telles que le déplacement soit parallèle au plan fixe; les deux dernières sont positives et liées par une équation

$$(2)\qquad S = F(K),$$

---

(1) Ces conclusions ont été publiées antérieurement, sans démonstration (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 novembre 1880 et 3 janvier 1881), et combattues par M. Cornu (même Recueil, 27 décembre 1880 et 10 janvier 1881). Plus récemment, lord Rayleigh a publié un aperçu de ses recherches sur ce sujet, et a donné la même expression pour la *vitesse de transport de l'intensité lumineuse* (*Nature*, 25 août et 17 novembre 1881). Ce physicien appelle *vitesse de la lumière* la vitesse individuelle des ondes, et désigne sous le nom de *vitesse du groupe d'ondes* la vitesse de transport de l'intensité lumineuse. Il m'a paru préférable de réserver pour cette dernière quantité le nom de *vitesse de la lumière*, en laissant ainsi à cette expression le sens qu'elle a toujours eu en dehors de toute idée théorique.

(2) Si l'on adopte les théories qui attribuent à ces équations différentielles des coefficients périodiques, les équations (1), et celles que nous considérerons par la suite, satisfont aux équations différentielles dites *auxiliaires*, à coefficients constants, que l'on déduit des précédentes, et qui régissent la *partie sensible* du mouvement vibratoire.

caractéristique du milieu considéré. On dit que ce milieu est *sans dispersion* ou *doué de dispersion*, suivant que l'équation (2) est ou non de la forme $\frac{S}{K} = \text{const}$. Le mouvement (1) est formé d'une suite illimitée d'ondes planes, ne différant en rien les unes des autres, et se propageant dans le sens des r positifs avec la vitesse $\frac{S}{K}$, la longueur d'onde et la période vibratoire étant respectivement $\frac{2\pi}{K}$ et $\frac{2\pi}{S}$.

2. On appelle *mouvements par ondes planes* les mouvements tels que ξ, η, ζ ne dépendent à chaque instant que de la distance du point considéré à un plan fixe. Nous prendrons ce plan pour plan des yz et, les déplacements étant dans le plan des ondes pour les mouvements que nous aurons à considérer, nous aurons identiquement $\xi = 0$.

Soient, pour $t = 0$,

$$(3)\quad \begin{cases} \eta = F_1(x), & \zeta = F_3(x), \\ \dfrac{d\eta}{dt} = F_2(x), & \dfrac{d\zeta}{dt} = F_4(x). \end{cases}$$

Considérons les équations

$$(4)\quad \begin{aligned} \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Bigg\{ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha - \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha\right]\sin(Kx - St) \\ & + \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha + \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha\right]\cos(Kx - St)\Bigg\}\, dK, \end{aligned}$$

$$(4')\quad \begin{aligned} \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Bigg\{ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha + \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha\right]\sin(Kx + St) \\ & + \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha - \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha\right]\cos(Kx + St)\Bigg\}\, dK, \end{aligned}$$

où S est lié à K dans chaque élément des intégrales définies par l'équation (2), et où $F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ sont les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, dans lesquelles on a remplacé x par α. Considérons aussi les équations analogues en ζ, qu'on formerait en remplaçant, dans les précédentes, $F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ respectivement par $F_3(\alpha)$ et $F_4(\alpha)$.

Le mouvement formé par la superposition des mouvements définis par ces quatre équations satisfait évidemment aux équations différentielles linéaires des petits mouvements; on vérifie aisément, par la formule de Fourier, qu'il satisfait aussi aux conditions initiales (3). Si l'on regarde les fonctions $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $F_3(\alpha)$, $F_4(\alpha)$ comme arbitraires, ces quatre équations réunies forment donc l'expression générale des mouvements par ondes planes, à vibrations transversales, qui peuvent exister dans le milieu qui nous occupe. Il nous suffira, dans la discussion de ces formules, de considérer une des deux projections, par exemple η; on pourra, pour fixer les idées, supposer que ζ est identiquement nul, et les mouvements dont nous écrirons les équations auront leurs vibrations rectilignes et parallèles à l'axe des y.

5. K et S étant de même signe par définition, le mouvement (4) se propage dans le sens des x positifs, et le mouvement (4') en sens contraire, d'une manière que nous étudierons par la suite. Les formules se simplifient lorsque le mouvement se propage dans un sens unique, par exemple dans le sens des x positifs, ce que nous admettrons dorénavant. En désignant respectivement par $f(t)$ et $f'(t)$ les seconds membres des équations (4) et (4'), on a toujours identiquement

$$f(t)+f'(-t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\sin K\alpha\,d\alpha\,.\,\sin(Kx-St)\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\cos K\alpha\,d\alpha\,.\cos(Kx-St)\right]dK,$$

et, $f'(t)$ étant identiquement nul par hypothèse, l'équation du mouvement s'écrira

$$(5)\qquad \eta=\int_0^\infty[\varphi_1(K)\sin(Kx-St)+\varphi_2(K)\cos(Kx-St)]\,dK,$$

en posant

$$(6)\qquad \begin{cases}\varphi_1(K)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\sin K\alpha\,d\alpha,\\[2ex] \varphi_2(K)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\cos K\alpha\,d\alpha.\end{cases}$$

4. Nous dirons que le mouvement (5) est *limité* lorsque le déplacement, à l'origine du temps, est compris tout entier entre deux plans parallèles aux ondes. Soient

$$x = x_1, \quad x = x_2$$

les équations de ces deux plans; $F_1(x)$ n'est différent de zéro que pour $x_1 < x < x_2$. En désignant par P la moyenne des valeurs absolues de $F_1(x)$ entre x_1 et x_2, on a, d'après les relations (6), en valeur absolue,

$$(7) \qquad \varphi_1(K) \quad \text{et} \quad \varphi_2(K) < \frac{P(x_2 - x_1)}{\pi}.$$

§ II. — Lumière homogène et sensiblement homogène.

5. Soit, dans ce même milieu et dans le sens des x positifs, un système quelconque de prismes, dont les arêtes sont parallèles à l'axe des y, suivi d'une lunette dont l'axe est dans le plan de xz. On sait que chacun des mouvements simples, tels que

$$(8) \qquad \eta = [\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)]\, dK,$$

qui forment par leur superposition le mouvement incident (5), se comporte dans ce système comme s'il existait seul. Soit A un point de l'intersection du plan focal de la lunette et du plan des xz, et soit

$$(9) \qquad \eta = [\varphi_1(K)\sin(u - St) + \varphi_2(K)\cos(u - St)]\, H\, dK$$

l'équation du mouvement qui existerait au point A, si le mouvement incident était le mouvement (8), u et H étant des fonctions de K indépendantes de t, que l'on calculera par les formules de la réflexion, de la réfraction et de la diffraction. Le mouvement incident étant le mouvement (5), le mouvement au point A aura pour équation

$$(10) \qquad \eta = \int_0^\infty [\varphi_1(K)\sin(u - St) + \varphi_2(K)\cos(u - St)]\, H\, dK.$$

La discussion de cette formule (10) formerait la *théorie de l'analyse*

spectrale, c'est-à-dire l'étude générale des relations existant, à chaque instant, entre le mouvement incident et l'intensité lumineuse aux divers points du spectre. Cette théorie fera l'objet d'un autre Mémoire, et nous nous bornerons ici à définir la lumière *sensiblement homogène.*

6. On appelle ainsi les rayons lumineux qui donnent un spectre d'étendue très limitée. Supposons qu'il en soit ainsi du mouvement (5), et que l'intensité lumineuse ne soit sensible qu'au voisinage du point A. Soit K_0 la valeur de K pour celui des mouvements (8) dont les ondes, après leur passage à travers les prismes, seraient normales à la droite qui joint A au centre optique de l'objectif. En appelant G la fonction sous le signe $\int$ dans le second membre de l'équation (5), et ε étant une quantité positive quelconque, petite par rapport à K_0, le mouvement incident (5) peut être regardé comme formé par la superposition de deux mouvements dont les équations suivent :

$$v_1 = \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} G\,dK, \tag{11}$$

$$v_2 = \int_0^{K_0-\varepsilon} G\,dK + \int_{K_0+\varepsilon}^{\infty} G\,dK. \tag{12}$$

Soient B un point quelconque du plan focal de la lunette, v la vitesse vibratoire qui existerait en ce point si le mouvement incident était le mouvement (11), et de même v' pour (12) ; la vitesse réelle au point B sera $v + v'$. Le premier terme de cette somme devient insensible dès que le point B n'est pas très voisin du point A. Nous savons, en effet, par la théorie de la diffraction, que la fonction H de l'équation (9) tend rapidement vers la limite 0, quand la droite qui joint le point considéré au centre optique fait un angle croissant avec la normale aux ondes qui arrivent à la lunette, et aussi, d'après les inégalités (7), que $\varphi_1(K)$ et $\varphi_2(K)$ sont inférieurs, en valeur absolue, à une limite déterminée. Pour les mêmes raisons, si la puissance des prismes est suffisante, v' sera insensible au voisinage du point A. Il est donc nécessaire et suffisant, pour que le spectre soit limité au voisinage de ce point, que v' soit insensible à chaque instant et dans tout le plan focal. Ainsi

le mouvement incident (12) ne donnerait, à lui seul, qu'une intensité lumineuse insensible dans toute l'étendue du spectre. L'expérience montre d'ailleurs que, pour qu'un mouvement lumineux satisfasse à cette condition, il faut et il suffit qu'il soit lui-même d'intensité insensible. Sans examiner pour le moment la question au point de vue théorique, nous conclurons de ce fait d'expérience que le second membre de (12) doit être fort petit pour que l'intensité lumineuse ne soit sensible qu'au voisinage du point A.

Nous dirons donc que *le mouvement lumineux défini par l'équation générale* (5) *est sensiblement homogène, lorsqu'on peut prendre l'intégrale définie du second membre de cette équation entre des limites très voisines* $K_0 - \varepsilon$ *et* $K_0 + \varepsilon$, *en ne commettant qu'une erreur insensible vis-à-vis de la moyenne* P *des valeurs absolues du déplacement initial* [1].

---

[1] Voici un exemple simple de ce genre de mouvement. Supposons le déplacement initial $F_1(x)$ nul en dehors des limites $-\frac{\pi}{m}$ et $\frac{\pi}{m}$, et égal, entre ces limites, à

$$a(1 + \cos mx)\cos K_0 x,$$

a, m et K_0 étant des constantes positives telles que $\frac{K_0}{m} = n$, n étant un nombre pair. L'équation (5) devient

$$z = \frac{a}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2}{K_0 + K} - \frac{2}{K_0 - K} - \frac{1}{K_0 + K + m} - \frac{1}{K_0 + K - m} + \frac{1}{K_0 - K + m} + \frac{1}{K_0 - K - m}\right)$$
$$\times \sin\frac{K\pi}{m}\cos(Kx - St)\,dK.$$

Si nous prenons l'intégrale définie entre les limites $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, ε étant plus grand que m, l'erreur commise sera plus petite, en valeur absolue, que

$$\frac{a}{2\pi}\left(\int_0^{K_0 - \varepsilon} R\,dK - \int_{K_0 + \varepsilon}^\infty R\,dK\right),$$

R désignant la parenthèse contenue dans l'intégrale définie précédente, qui est positive entre o et $K_0 - m$, et négative entre $K_0 + m$ et ∞. Nous avons, en désignant par l les logarithmes népériens,

$$\int_0^{K_0 - \varepsilon} R\,dK = l\frac{(2K_0 - \varepsilon)^2}{(2K_0 - \varepsilon)^2 - m^2} + 2l\frac{K_0^2 - m^2}{K_0^2} + l\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - m^2}.$$

$$\int_{K_0 + \varepsilon}^\infty R\,dK = l\frac{(2K_0 + \varepsilon)^2 - m^2}{(2K_0 + \varepsilon)^2} + l\frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon^2},$$

7. Si ε était infiniment petit, le mouvement (5) serait *parfaitement homogène*. Mais, d'après les inégalités (7), on a toujours, en valeur absolue,

$$\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} G\,dK < \frac{4\varepsilon P(x_2-x_1)}{\pi}.$$

Par définition, le premier membre de cette inégalité, pour $t=0$ et pour certaines valeurs de x, est au moins égal à P; il vient donc

$$\varepsilon > \frac{\pi}{4(x_2-x_1)},$$

ou bien

$$\frac{\varepsilon}{K_0} > \frac{\lambda_0}{8(x_2-x_1)}, \tag{13}$$

en appelant λ_0 la longueur d'onde qui correspond à K_0, d'après la relation générale $\lambda = \frac{2\pi}{K}$. Ainsi *un mouvement limité ne peut pas approcher indéfiniment de l'homogénéité parfaite, et d'autant moins que ses limites sont plus resserrées.*

8. Nous allons, dans la suite de ce Mémoire, étudier les propriétés et la propagation des mouvements sensiblement homogènes que nous venons de définir, et, en particulier, les limites vers lesquelles elles tendent lorsque le mouvement *tend vers l'homogénéité*, c'est-à-dire lorsque, x_2-x_1 devenant très grand vis-à-vis de λ_0, ε devient très petit, de telle sorte qu'on ait toujours

$$\varepsilon(x_2-x_1) < Q, \tag{14}$$

Q étant une quantité donnée. En conséquence, dans tout ce qui va suivre, nous considérerons, au lieu du mouvement (5), le mouvement

---

et, par suite, l'erreur commise est une très petite fraction de $\frac{a}{2\pi}$, quel que soit ε, pourvu que m soit très petit par rapport à ε et à K_0. Cette erreur est donc très petite vis-à-vis de la moyenne P, qui est ici $\frac{2a}{\pi}$.

sensiblement équivalent

$$(15)\qquad \eta = \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} [\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)]\,dK$$

§ III. — Ondes et vibrations.

9. En posant

$$(16)\qquad \begin{cases} f_1(x,t) = \displaystyle\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} \{\varphi_1(K)\cos[(K-K_0)x - (S-S_0)t] \\ \qquad\qquad - \varphi_2(K)\sin[(K-K_0)x - (S-S_0)t]\}\,dK, \\ f_2(x,t) = \displaystyle\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} \{\varphi_1(K)\sin[(K-K_0)x - (S-S_0)t] \\ \qquad\qquad + \varphi_2(K)\cos[(K-K_0)x - (S-S_0)t]\}\,dK, \end{cases}$$

S_0 étant la valeur de S qui correspond à K_0 d'après l'équation (2), l'équation (15) s'écrit

$$(17)\qquad \eta = f_1(x,t)\sin(K_0x - S_0t) + f_2(x,t)\cos(K_0x - S_0t).$$

Première approximation. — Si l'on regarde les fonctions $f_1(x,t)$ et $f_2(x,t)$ comme constantes dans les intervalles de x à $x+\Delta x$, et de t à $t+\Delta t$, l'erreur commise sur le second membre de l'équation (17) est plus petite en valeur absolue, d'après les inégalités (7) et (14), que la somme des valeurs absolues de $\frac{4\varepsilon\Delta x\,PQ}{\pi}$ et de $\frac{2\sigma\Delta t\,PQ}{\pi}$, σ étant la différence des valeurs de S qui correspondent, d'après l'équation (2), à $K_0-\varepsilon$ et $K_0+\varepsilon$. Si donc le mouvement est voisin de l'homogénéité, et si Δx et Δt ne sont pas trop grands en valeur absolue, les fonctions $f_1(x,t)$ et $f_2(x,t)$ sont sensiblement constantes dans l'intervalle considéré.

Par suite, à cette première approximation, le mouvement (17) peut être regardé, dans un intervalle d'autant plus grand qu'il est lui-même plus voisin de l'homogénéité, comme se réduisant à un mouvement simple tel que le mouvement (1), formé par une suite d'ondes égales et régulières, de longueur d'onde $\frac{2\pi}{K_0}$, et de période vibratoire $\frac{2\pi}{S_0}$, qui se

propagent avec la vitesse $\frac{S_0}{K_0}$. Ainsi le mouvement (17) ne peut pas présenter de variations brusques ni rapides de longueur d'onde, de phase ou d'amplitude.

10. *Deuxième approximation.* — L'équation (17) s'écrit

$$\eta = \mathcal{F}(x, t) \sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x, t)], \tag{18}$$

en posant

$$\mathcal{F}(x, t) = \pm \sqrt{[f_1(x, t)]^2 + [f_2(x, t)]^2}, \tag{19}$$

$$\chi(x, t) = \operatorname{arctang} \frac{f_2(x, t)}{f_1(x, t)}. \tag{20}$$

Les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ étant continues, chacune des racines de l'équation (20) est une fonction continue de x et de t, à moins que $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ ne s'annulent à la fois. Mais il résulte de ce que nous venons de voir que, au voisinage des points ou des instants où les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ s'annuleraient toutes deux, le déplacement η serait insensible vis-à-vis de P. Ainsi la discontinuité de $\chi(x, t)$ ne peut pas se produire tant que l'intensité lumineuse ne devient pas négligeable, et, par suite, nous n'avons pas à nous en occuper.

Nous prendrons arbitrairement pour $\chi(x, t)$, en un point et à un instant déterminés, une des racines de l'équation (20), et cette fonction se trouvera déterminée, pour les autres valeurs de x et de t, par la condition de continuité. Le signe du radical de la formule (19) sera choisi de manière à identifier les seconds membres des équations (17) et (18); le même signe conviendra tant que l'intensité lumineuse ne deviendra pas insensible, le second membre de l'équation (17) et

$$\sin[K_0 x - S_0 t - \chi(x, t)]$$

changeant de signe en même temps.

11. Il suffira évidemment, ici et par la suite, de considérer ce qui se passe sur l'axe des x.

Soient (x) et $\left(x + \frac{l}{2}\right)$ deux points consécutifs où le déplacement η est nul au temps t. Ces deux points comprennent entre eux une demi-

ondulation, et la quantité l *est la longueur d'onde au point* (x) *et au temps* t. L'amplitude $\mathfrak{F}(x, t)$ n'étant pas nulle, nous aurons

$$K_0 x - S_0 t + \chi(x, t) = n\pi,$$

$$K_0\left(x + \frac{l}{2}\right) - S_0 t + \chi\left(x + \frac{l}{2}, t\right) = (n+1)\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque; d'où, en développant

$$\chi\left(x + \frac{l}{2}, t\right)$$

par la formule de Taylor et ne conservant que les deux premiers termes, il vient

$$(21)\quad \frac{2\pi}{l} = K_0 + \frac{d\chi(x,t)}{dx} = K_0 + \frac{f_1(x,t)\dfrac{df_2(x,t)}{dx} - f_2(x,t)\dfrac{df_1(x,t)}{dx}}{[\mathfrak{F}(x,t)]^2}.$$

12. En définissant de même *la durée de la vibration au point* (x) *et au temps* t et la désignant par θ, on a de même

$$(22)\quad \frac{2\pi}{\theta} = S_0 - \frac{d\chi(x,t)}{dt} = S_0 - \frac{f_1(x,t)\dfrac{df_2(x,t)}{dt} - f_2(x,t)\dfrac{df_1(x,t)}{dt}}{[\mathfrak{F}(x,t)]^2}.$$

13. Supposons maintenant que le premier des points considérés au n° **11** se déplace sur l'axe des x, de telle sorte qu'en ce point mobile on ait constamment $\eta = 0$. Sa vitesse w sera *la vitesse de l'onde au point* (x) *et au temps* t. Soit $(x + dx)$ ce point au temps $t + dt$; on a

$$K_0\, dx - S_0\, dt + \frac{d\chi(x,t)}{dx}\, dx + \frac{d\chi(x,t)}{dt}\, dt = 0,$$

et, par suite,

$$(23)\qquad w = \frac{dx}{dt} = \frac{S_0 - \dfrac{d\chi(x,t)}{dt}}{K_0 + \dfrac{d\chi(x,t)}{dx}} = \frac{l}{\theta}.$$

Ainsi *la vitesse de l'onde est, comme dans un mouvement simple, égale*

en chaque point et à chaque instant au rapport de la longueur d'onde à la durée de la vibration existant en ce point et à cet instant. Ces deux quantités sont d'ailleurs, d'après les relations (7) et (14), peu différentes de $\frac{2\pi}{K_0}$ et de $\frac{2\pi}{S_0}$, tant que l'amplitude $\mathcal{F}(x, t)$ n'est pas insensible vis-à-vis de P.

14. *La relation qui lie entre elles la longueur d'onde l et la durée de la vibration θ est la même que celle qui existerait dans un mouvement simple tel que le mouvement* (1). En effet, on aurait dans ce cas, d'après l'équation (2),

$$\frac{2\pi}{\theta} = F\left(\frac{2\pi}{l}\right),$$

ou bien, en remarquant que $\frac{2\pi}{l}$ est très voisin de K_0,

$$\frac{2\pi}{\theta} = S_0 + \left(\frac{2\pi}{l} - K_0\right) F'(K_0).$$

Mais, ε étant fort petit, on a sensiblement, dans les limites des intégrales des formules (16),

$$S = S_0 + (K - K_0) F'(K_0),$$

et, par suite, on a identiquement

$$\frac{df_1(x,t)}{dt} = -F'(K_0)\frac{df_1(x,t)}{dx},$$

et de même pour f_2, ce qui démontre le théorème d'après les relations (21) et (22).

15. On appelle *intensité lumineuse au point* (x) *et au temps* t la valeur moyenne I du carré de la vitesse vibratoire $\frac{d\eta}{dt}$ pendant l'intervalle de $t - \Delta t$ à $t + \Delta t$, Δt étant fort petit, mais comprenant cependant un grand nombre de vibrations.

D'après les relations (18) et (22), on a

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left\{\frac{2\pi}{\theta}\mathfrak{F}(x,t)\cos[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]\right\}^2$$
$$- \frac{2\pi}{\theta}\mathfrak{F}(x,t)\frac{d\mathfrak{F}(x,t)}{dt}\sin 2[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]$$
$$+ \left\{\frac{d\mathfrak{F}(x,t)}{dt}\sin[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]\right\}^2.$$

Dans l'expression de $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$, le troisième terme est insensible, $\frac{d\mathfrak{F}(x,t)}{dt}$ étant déjà fort petit en valeur absolue; le second change périodiquement de signe et s'annulera sensiblement dans la moyenne; il vient donc

$$(24) \qquad I = \frac{1}{2\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\theta}\mathfrak{F}(x,t)\right]^2.$$

Comme $\frac{2\pi}{\theta}$ est très voisin de S_0, on voit que l'intensité lumineuse est sensiblement proportionnelle au carré de l'amplitude $\mathfrak{F}(x,t)$.

16. En résumé, un mouvement lumineux sensiblement homogène est formé d'une suite d'ondulations, qui ne présente que des variations lentes et graduelles de longueur d'onde, de phase et d'amplitude. Chaque onde possède, à chaque instant, la durée de la vibration et la vitesse de propagation qui dépendent de sa longueur, d'après l'équation (2), caractéristique du milieu considéré; ces trois quantités peuvent d'ailleurs varier d'une manière graduelle, comme nous allons le voir, quand l'onde se transporte dans l'espace. Enfin, la longueur d'onde est très peu différente d'une certaine valeur moyenne, qui entrera dans les calculs ordinaires de l'Optique physique

§ IV. — Transport des ondes et de l'intensité lumineuse.

17. Nous allons maintenant chercher comment varie en fonction du temps l'intensité lumineuse, et comment varie chacune des ondes pendant sa propagation.

Lorsque le milieu est sans dispersion, en appelant a la valeur constante de $\frac{S}{K}$, l'équation générale (5) est de la forme

$$\eta = f(x - at).$$

Le mouvement se transporte alors, sans altération, avec la vitesse de propagation a, et chaque onde reste indéfiniment ce qu'elle était à un instant quelconque. Dans les milieux doués de dispersion, les ondes ne sont pas ainsi *persistantes*, mais, au contraire, *variables* en général dans tous leurs éléments. Néanmoins, quand le mouvement est sensiblement homogène, sa propagation s'effectue suivant quelques lois assez simples.

Nous avons, d'après l'équation (2), par la formule de Taylor,

$$(25)\quad S = S_0 + (K - K_0)F'(K_0) + \frac{(K-K_0)^2}{1.2}F''(K_0) + \frac{(K-K_0)^3}{1.2.3}F'''(K_0) + \ldots,$$

et cette valeur de S, substituée dans le second membre des équations (16), nous permettra d'étudier par des approximations successives le mouvement (17).

18. *Première approximation.* — Dans le second membre de (25), on néglige les puissances de $K - K_0$ supérieures à la première. Il vient

$$(26)\quad \begin{cases} f_1(x, t) = f_1[x - tF'(K_0), 0], \\ f_2(x, t) = f_2[x - tF'(K_0), 0], \end{cases}$$

et par suite l'équation (18) du mouvement s'écrit

$$\eta = \mathfrak{F}[x - tF'(K_0), 0] \sin\{K_0 x - S_0 t + \chi[x - tF'(K_0), 0]\}.$$

On exprime ce résultat sous une forme géométrique en disant que, si l'une quelconque des fonctions $\mathfrak{F}(x, t)$ ou $\chi(x, t)$ est représentée à l'origine du temps par une certaine courbe, et si cette courbe se transporte sans déformation suivant l'axe des x, avec la vitesse $F'(K_0)$, elle représentera encore la fonction à chaque instant.

En désignant par D_2 la plus grande valeur absolue de $F''(K_0)$ entre $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, et par e la base des logarithmes népériens, l'erreur

commise sur $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{4PQ}{\pi}\left(e^{\frac{D_2 Q \varepsilon t}{x_2 - x_1}} - 1\right),$$

comme on le vérifiera aisément, d'après les inégalités (7) et (14). Si ε est assez petit, cette erreur sera insensible vis-à-vis de P tant que le rapport $\frac{t F'(K_0)}{x_2 - x_1}$ ne sera pas très grand. Ainsi, en conservant la même représentation géométrique, on dira que, si le mouvement est voisin de l'homogénéité, l'erreur commise est insensible tant que le chemin parcouru par la courbe n'est pas très grand par rapport à la longueur qu'occupait le déplacement initial.

19. *Vitesse de la lumière.* — L'intensité lumineuse I, d'après les formules (22) et (24), est elle-même exprimée par une fonction de la forme

$$f[x - t F'(K_0)].$$

Ainsi $F'(K_0)$ est la *vitesse de la lumière* ou *vitesse de transport de l'intensité lumineuse pour la longueur d'onde* λ_0, telle qu'on la mesurerait par les méthodes directes qui mettent à profit des variations d'intensité.

Si la vitesse de la lumière est la même pour toutes les couleurs, comme cela a lieu sensiblement dans le vide, $F'(K_0)$ étant indépendant de K_0, l'équation (2) est de la forme

$$S = aK + b,$$

a et b étant des constantes, la seconde restant indéterminée. Mais il paraît difficile d'admettre, dans les idées actuelles, que cette relation puisse être réalisée avec $b \gtrless 0$, et nous admettrons que le vide est un milieu sans dispersion.

20. *Variation des ondes.* — L'amplitude $\bar{\mathfrak{z}}(x, t)$ variant très lentement avec x, on peut prendre pour l'*amplitude d'une onde* la valeur que possède $\bar{\mathfrak{z}}(x, t)$ au milieu de cette onde. Soit (x_0) ce point à l'origine du temps; l'onde se propageant avec une vitesse très voisine de $\frac{S_0}{K_0}$, son milieu sera, au temps t, très près du point $\left(x_0 + t\frac{S_0}{K_0}\right)$.

L'amplitude de l'onde, étant donnée par la formule générale

$$\mathfrak{F}[x - t\,F'(K_0), 0].$$

sera donc égale à

$$\mathfrak{F}\left\{x_0 + \left[\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)\right]t, 0\right\}.$$

Cette amplitude varie donc avec t, et l'on voit que l'onde qui nous occupe possède au temps t l'amplitude que possédait à l'origine du temps l'onde dont le milieu était au point

$$\left\{x_0 + \left[\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)\right]t\right\},$$

ou tout près de ce point. $F'(K_0)$ étant positif et plus petit que $\frac{S_0}{K_0}$ dans les milieux réels, comme nous le verrons, l'amplitude d'une onde est croissante ou décroissante, à un instant donné, suivant que l'amplitude de l'onde qui la précède est plus grande ou plus petite que la sienne propre. Plus généralement, l'onde prendra successivement les amplitudes que possèdent, au moment actuel, toutes les ondes qui la précèdent, comme elle a passé déjà par les amplitudes des ondes qui la suivent. Si l'on néglige, comme nous en sommes convenus, la différence entre les seconds membres des équations (5) et (17), on pourra dire que l'onde a pris naissance au temps $\frac{x_1 - x_0}{\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)}$, et prendra fin au temps $\frac{x_2 - x_0}{\frac{S_0}{K_0} - F'(K^0)}$, fournissant ainsi dans l'espace une carrière limitée et égale à $\frac{x_2 - x_1}{1 - \frac{K_0}{S_0}F'(K_0)}$.

Nous avons aussi $\chi(x, t) = \chi[x - t\,F'(K_0), 0]$. On a vu, dans le § III, que la longueur d'onde et la durée de la vibration dépendent de $\chi(x, t)$. En raisonnant comme nous venons de le faire pour l'amplitude, on voit facilement que, si la longueur d'onde n'est pas exactement la même sur toute l'étendue du mouvement, chaque onde, en se propageant, varie de longueur d'onde et de durée vibratoire, en suivant la même loi que pour l'amplitude.

21. Ainsi, à cette première approximation, l'amplitude, la longueur des ondes et les particularités qu'elles peuvent présenter, tout ce qui, en un mot, distingue une portion du mouvement d'une autre, se transporte sans altération avec la vitesse $F'(K_0)$, et forme, en quelque sorte, un cadre mobile que viennent remplir successivement les ondes, qui marchent avec une vitesse plus grande. Ce mode de propagation fort simple sera toujours réalisé quand le mouvement lumineux sera suffisamment voisin de l'homogénéité.

22. *Deuxième approximation.* — On tient compte du terme en $(K - K_0)^2$ dans le développement de S. En appelant D_3 la plus grande valeur absolue de $F''(K)$ entre $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, l'erreur commise est plus petite, en valeur absolue, que

$$\frac{4PQ}{\pi}\left(e^{\frac{D_3 \varepsilon^2 Q t}{8(x_2 - x_1)}} - 1\right).$$

La première des équations (16) peut s'écrire

$$\begin{aligned} f_1(x, t) = \int_{K_0-}^{K_0+\varepsilon} & \{\varphi_1(K)\cos\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\} \\ & - \varphi_2(K)\sin\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\}\}\cos\frac{F''(K_0)(K - K_0)^2 t}{2}\,dK \\ + \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} & \{\varphi_1(K)\sin\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\} \\ & + \varphi_2(K)\cos\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\}\}\sin\frac{F''(K_0)(K - K_0)^2 t}{2}\,dK. \end{aligned}$$

En développant en série le cosinus et le sinus en dehors des crochets, et formant les dérivées successives par rapport à x de $f_1[x - tF'(K_0), o]$ et de $f_2[x - tF'(K_0), o]$, cette équation s'écrit

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} f_1(x, t) = f_1[x - tF'(K_0), o] & - \frac{t^2}{1.2}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^2 f_1^{\text{IV}}[x - tF'(K_0), o] \\ & + \frac{t^4}{1.2.3.4}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^4 f_1^{\text{VIII}}[x - tF'(K_0), o] - \cdots \\ & - t\frac{F''(K_0)}{2} f_2''[x - tF'(K_0), o] \\ & + \frac{t^3}{1.2.3}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^3 f_2^{\text{VI}}[x - tF'(K_0), o] - \cdots \end{aligned}\right.$$

On trouve de même

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} f_2(x,t) = {} & f_2[x - tF'(K_0), 0] - \frac{t^2}{1.2}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^2 f_2^{\text{iv}}[x - tF'(K_0), 0] \\ & + \frac{t^4}{1.2.3.4}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^4 f_2^{\text{viii}}[x - tF'(K_0), 0] - \cdots \\ & + t\frac{F''(K_0)}{2} f_1''[x - tF'(K_0), 0] \\ & - \frac{t^3}{1.2.3}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^3 f_1^{\text{vi}}[x - tF'(K_0), 0] + \cdots \end{aligned}\right.$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f_1(x, t)$ ou de $f_2(x, t)$ étant plus petite, en valeur absolue, que $\frac{4PQ\varepsilon^n}{\pi}$, d'après les inégalités (7) et (14), ces séries sont convergentes, quel que soit t.

23. Nous allons examiner en particulier le cas où t est assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la premiere.

En posant

$$(29)\qquad v = F'(K_0) + F''(K_0)\frac{d\chi[x - tF'(K_0), 0]}{dx},$$

on a sensiblement, d'après la formule (21), pour $t = 0$,

$$v = F'(K_0) + \left(\frac{2\pi}{l} - K_0\right)F''(K_0) = F'\left(\frac{2\pi}{l}\right);$$

v est donc la valeur de la *vitesse de la lumière* qui correspond à la longueur d'onde l, existant au point (x), à l'origine du temps. En d'autres termes, c'est la vitesse avec laquelle se transporterait sans déformation la courbe des intensités lumineuses, si, le mouvement étant sensiblement homogene, la longueur d'onde était, dans tout le milieu, ce qu'elle est au point considéré. On a sensiblement

$$[\mathfrak{F}(x - vt, 0)]^2 = \{\mathfrak{F}[x - tF'(K_0), 0]\}^2 - t[v - F'(K_0)]\frac{d\{\mathfrak{F}[x - tF'(K_0)]\}^2}{dx}.$$

Mais, d'après les relations (27) et (28),

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}(x,t)]^2 = {} & \{f_1[x - tF'(K_0), 0]\}^2 + \{f_2[x - tF'(K_0), 0]^2\} \\ & - tF''(K_0)\{f_1[x - tF'(K_0), 0]f_2'[x - tF'(K_0), 0] \\ & - f_2[x - tF'(K_0), 0]f_1'[x - tF'(K_0), 0]\}. \end{aligned}$$

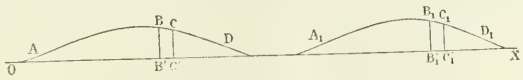
En appelant H le coefficient de $-tF''(K_0)$ dans cette formule, on a identiquement, d'après la formule (20),

$$H = \{\mathcal{F}[x - tF'(K_0), 0]\}^2 \frac{d^2\chi[x - tF'(K_0), 0]}{dx^2} + \frac{d\chi[x - tF'(K_0), 0]}{dx} \frac{d\mathcal{F}[x - tF'(K_0), 0]^2}{dx},$$

et, par suite, on a l'identité

$$(30) \qquad [\mathcal{F}(x, t)]^2 = [\mathcal{F}(x - vt)]^2 \left(1 - t\frac{dv}{dx}\right).$$

24. D'où résulte la construction suivante. Supposons que le carré de l'amplitude $[\mathcal{F}(x, t)]^2$ soit représenté, à l'origine du temps, par la courbe ABCD. Imaginons que l'ordonnée BB′ se transporte avec la vitesse de la lumière v qui correspond à la longueur d'onde existant,



à l'origine du temps, au point B′; soit B'_1 le pied de cette ordonnée au temps t; prenons sur elle une longueur $B_1B'_1$ égale à $\overline{BB'} \times (1 - Mt)$, M étant la valeur de $\frac{dv}{dx}$ au point B′, à l'origine du temps. Le point B_1 ainsi obtenu est un point de la courbe qui représente le carré de l'amplitude au temps t. Si la longueur d'onde, à l'origine du temps, n'est pas exactement la même sur toute l'étendue du mouvement, la courbe ABCD se transporte donc en subissant diverses déformations, qui ne dépendent pas de la forme de cette courbe. On voit aisément que le trapèze très petit $B_1B'_1C'_1C_1$ a même surface que le trapèze correspondant BB′C′C, et qu'ainsi l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des x, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(x, t)]^2 \, dx,$$

reste constante.

Ainsi, à cette seconde approximation, on pourra le plus souvent, en

négligeant des perturbations locales, regarder encore l'amplitude comme se transportant avec la *vitesse de la lumière* qui correspond à la longueur d'onde moyenne du mouvement.

La courbe $A_1B_1C_1D_1$ étant tracée, on pourra supposer l'origine du temps transportée à l'instant t, et recommencer la même construction, en tenant compte de ce que la longueur d'onde peut n'être pas exactement, au point B'_1, ce qu'elle était au point B'.

25. On a, d'après les formules (27) et (28),

$$\chi(x,t) = \chi[x - tF'(K_0), 0] + \frac{tF''(K_0)}{2}\,\frac{f_1[x-tF'(K_0),0]f'_1[x-tF'(K_0),0]+f_2[x-tF'(K_0),0]f'_2[x-tF'(K_0),0]}{\{\mathcal{F}[x-tF'(K_0),0]\}^2}.$$

D'après les formules (19) et (20), le coefficient de $\frac{tF''(K_0)}{2}$, dans le second membre de cette équation, est identiquement égal à

$$\frac{\dfrac{d^2\mathcal{F}[x-tF'(K_0),0]}{dx^2}}{\mathcal{F}[x-tF'(K_0),0]} - \left\{\frac{d\chi[x-tF'(K_0),0]}{dx}\right\}^2;$$

d'où, en désignant le premier terme de cette expression par R, il vient identiquement

$$\frac{d\chi(x,t)}{dx} = \frac{d\chi(x-vt)}{dx} + \frac{tF''(K_0)}{2}\,\frac{dR}{dx}, \tag{31}$$

et cette formule permettra de calculer aisément l et δ.

§ V. — Calcul numérique de la vitesse de la lumière.

26. Désignons par V la vitesse de la lumière pour la longueur d'onde λ, dans un premier milieu. Nous avons

$$V = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{32}$$

ou, par une transformation simple,

$$V = \frac{\lambda}{T} - \lambda \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}.$$

Soit maintenant un second milieu; appelons V' et λ' la vitesse de la lumière et la longueur d'onde qui correspondent, dans ce milieu, à la même période vibratoire T, et n son indice de réfraction par rapport au premier milieu, pour la même période. Nous avons

$$V' = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)},$$

et aussi, par la théorie de la réfraction,

$$n = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

d'où il vient

$$\frac{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\frac{V}{V'} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)},$$

et, par suite, la relation entre V, V' et n est la suivante :

$$\frac{V}{V'} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}. \tag{33}$$

Ainsi l'*indice relatif de deux milieux est en général différent du rapport des vitesses de la lumière dans ces milieux.*

27. Supposons maintenant que le premier milieu soit le vide; n est l'*indice de réfraction* du second milieu, λ et V sont la longueur d'onde du rayon et la vitesse de la lumière dans le vide. Si le second milieu est doué d'une faible dispersion, comme l'eau, on a approximativement la relation connue $V' = \frac{V}{n}$. Dans tous les milieux transparents autres que

le vide, $\frac{dn}{d\lambda}$ étant négatif, on a toujours $V' < \frac{V}{n}$. Si l'on admet que le vide est un milieu sans dispersion, comme cela est probable, V étant alors égal à $\frac{\lambda}{T}$, il vient $V' < \frac{\lambda'}{T}$. Ainsi, *dans tous les milieux transparents autres que le vide, la vitesse de la lumière est plus petite que la vitesse individuelle des ondes lumineuses.*

On sait qu'on a avec une grande approximation

$$n = A\lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} + \cdots,$$

A, B, C, D, ... étant des constantes déterminées expérimentalement; d'où il vient, d'après la formule (33),

$$\frac{V}{V'} = -A\lambda^2 + B + \frac{3C}{\lambda^2} + \frac{5D}{\lambda^4} + \cdots,$$

formule qui permet de calculer aisément V'.

Le tableau suivant donne les valeurs du rapport $\frac{V}{nV'}$ de la *vitesse des ondes* à la *vitesse de la lumière* dans l'air, l'eau et le sulfure de carbone et pour les deux extrémités et le milieu du spectre visible [1].

Raies de Fraunhofer.	Air.	Eau.	Sulfure de carbone.
A	1,00001	1,0090	1,033
D	1,00001	1,0134	1,062
H	1,00002	1,0263	1,191

On voit que, dans l'air et même dans l'eau, ce rapport est assez voisin de l'unité; mais dans les milieux bien dispersifs, tels que le sulfure de carbone, et avec les rayons les plus réfrangibles du spectre visible, la différence est assez notable; elle le serait bien plus encore si l'on considérait les rayons ultra-violets.

---

(1) Les indices de réfraction sont empruntés aux Mémoires dont les titres suivent :

MASCART, *Sur la dispersion des gaz* (*Comptes rendus*, t. LXXVIII).

VAN DER WILLIGEN, *Les indices de réfraction du sulfure de carbone* (*Archives du Musée Teyler*, vol. III); — *Sur la réfraction de l'eau* (même recueil, vol. I).

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *de Gauss;*

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

La théorie de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss et de l'équation différentielle du second ordre à laquelle elle satisfait a été généralisée de diverses manières par plusieurs géomètres. Mais comme, dans les applications des Mathématiques, on rencontre rarement d'équations différentielles d'ordre supérieur au second, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et l'équation du second ordre à laquelle elle satisfait conservent un intérêt particulier. J'examine dans cet article les cas dans lesquels la solution générale de cette équation peut s'exprimer sous forme finie; j'obtiens par conséquent aussi les cas où la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ peut elle-même s'exprimer sous forme finie. Quand il n'y aura qu'une solution particulière susceptible d'être exprimée ainsi, je donne une formule qui ramène immédiatement le calcul d'une seconde solution particulière à celui de l'intégrale d'une différentielle binôme non intégrable exactement. Enfin je recherche quand la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ est périodique par rapport à φ et a 2π pour période.

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE L'ÉQUATION PROPOSÉE.

1. Nous allons rappeler rapidement les propriétés générales de l'équation

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dP}{dx} - \alpha\beta P = 0.$$

En posant en général

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,$$

la solution générale de cette équation est

$$CF(\alpha, \beta, \gamma, x) + C'x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

C, C′ étant deux constantes arbitraires. Toutefois, dans le cas où γ est égal à 1, les deux solutions particulières qui multiplient C et C′ sont identiques, et l'on remplacera la seconde solution particulière par la limite de

$$\frac{x^{\varepsilon}F(\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon, 1-\varepsilon, x) - F(\alpha, \beta, 1-\varepsilon, x)}{\varepsilon},$$

quand ε tend vers zéro, ou par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)\log x + \frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta} + 2\frac{dF}{d\gamma},$$

pour $\gamma = 1$.

La transformée en $y = 1 - x$ de l'équation différentielle est

$$y(1-y)\frac{d^2P}{dy^2} + (\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)y)\frac{dP}{dy} - \alpha\beta P = 0,$$

qui est de même forme et dont la solution générale est

$$CF(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) + C'y^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, y),$$

C, C′ étant deux constantes arbitraires. D'après cela, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est égale à cette même expression dans laquelle C et C′ ont des valeurs déterminées. D'après une formule donnée par Gauss, on a

$$2\left\{\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) \\ & + \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}y^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, y) \end{aligned}\right.$$

[*Determinatio seriei nostræ per æquationem differentialem* (*Gauss Werke*, t. III)], le signe $\Pi(n)$ étant équivalent au signe $\Gamma(n+1)$ de Legendre.

2. Si l'on pose $x = \frac{1}{z}$, $P = z^\alpha P'$, l'équation (1) devient

$$z(1-z)\frac{d^2P'}{dz^2} - [\beta - \alpha - 1 - (\gamma - 2\alpha - 2)z]P' + \alpha(\gamma - \alpha - 1)P' = 0,$$

dont une solution est $F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, z)$. On a donc, pour solutions de l'équation primitive,

$$x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right), \quad x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right),$$

la seconde se déduisant de la première par analogie.

Les points critiques de la solution générale sont donc $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$, dont le premier n'appartient pas à la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

La série qui donne $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'est convergente que pour des valeurs de x qui ne sont pas plus grandes que 1 ou dont le module n'est pas plus grand. Pour définir la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pour des valeurs de x plus grandes que 1, il faut imaginer qu'elle continue à satisfaire à l'équation différentielle et que la variable décrive un demi-cercle infiniment petit autour du point $x = 1$.

Ainsi, pour des valeurs de x plus grandes que 1, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & Mx^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right) \\ & + Nx^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right), \end{aligned}\right.$$

M, N étant des constantes à déterminer. Pour simplifier, écrivons la formule (2) ainsi :

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & AF(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) \\ & + By^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, y). \end{aligned}$$

Posons $y = re^{\theta i}$, où $i = \sqrt{-1}$ et r est infiniment petit, et faisons

croître φ de zéro à π, la formule se changera en la suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= A\,F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,y)\\ &\quad + B r^{\gamma-\alpha-\beta} e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,y). \end{aligned}\right.$$

Dans la formule (3) remplaçons les fonctions du second membre par les valeurs suivantes, qui se déduisent de (2) :

$$\begin{aligned} &F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)\\ &\quad = \frac{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-\beta-1)} F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad - \frac{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)\\ &\quad = \frac{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)} F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad - \frac{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta-\gamma)}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Pour que la valeur de x soit la même dans (3) que dans (4), faisons-y $x-1=r$. Les substitutions précédentes étant faites, les formules (3) et (4) renfermeront des termes qui ne dépendront pas de $r^{\gamma-\alpha-\beta}$ et d'autres qui contiendront ce facteur. Pour identifier les formules (3), (4), il suffit d'identifier ces deux sortes de termes et l'on obtient

$$A = M\frac{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-\beta-1)} + N\frac{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)},$$

$$e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i} B = M\frac{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)} + N\frac{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta-\gamma)}.$$

Remplaçons A, B par leurs valeurs et posons

$$M = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}h,\quad N = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\beta-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)}l,$$

h, l étant deux nouvelles inconnues ; appliquons ensuite plusieurs fois

la formule

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi},$$

et nous aurons

$$h \sin\beta\pi - l \sin\alpha\pi = \sin(\beta - \alpha)\pi,$$

$$h \sin(\gamma - \alpha)\pi - l \sin(\gamma - \beta)\pi = \sin(\beta - \alpha)\pi . e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}$$

Les deux solutions sont

$$h = e^{-\alpha\pi i}, \quad l = e^{-\beta\pi i};$$

ainsi M, N sont complètement déterminés.

TABLEAU DE FORMULES REPRÉSENTANT DES SOLUTIONS.

3. Kummer a donné vingt-quatre formes de solutions qu'on peut ranger en six classes de quatre fonctions, les quatre fonctions de chaque classe étant des solutions équivalentes, tandis que les solutions appartenant à deux classes distinctes sont en général différentes. Jacobi a obtenu très rapidement ces formes dans son Mémoire sur la série hypergéométrique (t. III de ses Mémoires).

Les solutions de la première classe sont

$$\text{Classe I....} \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x), \\ (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \\ (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Pour les autres classes, il suffit de marquer une des formes de solution, parce que les trois autres s'en déduisent en changeant la fonction F qui s'y trouve, comme la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est changée par

les trois formes suivantes de la première classe. On a ainsi

Classe II..... $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$,

Classe III..... $x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right)$,

Classe IV..... $x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,

Classe V..... $x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$,

Classe VI..... $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$.

DE DIFFERENTS CAS OU L'ÉQUATION PEUT S'INTÉGRER COMPLÈTEMENT SOUS FORME FINIE.

4. La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'a en général aucun sens si γ est un nombre entier négatif, puisque tous les termes deviennent infinis à partir d'un certain rang. Il y aura toutefois exception si l'un des nombres α, β est lui-même entier négatif et que sa valeur absolue soit moindre que celle de γ. En effet, supposons que l'on fasse d'abord

$$\alpha = -m+\varepsilon, \quad \gamma = -n+\eta,$$

m, n étant deux nombres entiers positifs et $n > m$, tandis que ε, η sont de très petites quantités. Faisons tendre ε et η vers zéro; la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$ restant indéterminée, l'expression de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pourra être considérée à la limite comme la solution générale de l'équation du second ordre. Mais, si l'on suppose que la limite de $\frac{\varepsilon}{\eta}$ soit nulle, l'expression de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ se changera en un polynôme entier, comme si γ était un nombre quelconque, et ce polynôme sera une solution particulière.

Nous désignerons ce polynôme par

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

et, d'après ce que nous venons de dire, les deux nombres entiers α, γ

satisfont aux inégalités

$$\gamma \leqq \alpha \leqq 0.$$

On a, en général,

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

mais, au contraire, les deux fonctions

$$(a) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

sont ordinairement distinctes, puisque, si β n'est pas entier, la seconde fonction est irrationnelle, tandis que la première est entière. Les premier et troisième éléments de $f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$ satisfont bien aux inégalités

$$\gamma \leqq \gamma-\alpha \leqq 0,$$

qui rentrent dans les inégalités précédentes et sont deux nombres entiers. Enfin, les deux fonctions (a) sont solutions de l'équation différentielle, lorsque γ et α satisfont aux conditions ci-dessus.

Supposons $\alpha = \gamma = -n$, n étant un nombre entier positif;

$$f(-n, \beta, -n, x)$$

représentera la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $(1-x)^{-\beta}$, en sorte que n n'entre plus dans la fonction que pour en déterminer le nombre des termes.

5. On peut se servir de ce résultat pour intégrer l'équation sous forme finie dans plusieurs cas que nous allons indiquer.

Premier cas. — Supposons α, γ deux nombres entiers, satisfaisant à ces inégalités

$$(b) \qquad \alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha - 1 \geqq 0.$$

Dans le cas général, on a (n° **1**) la solution

$$x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x);$$

mais, dans le cas actuel, comme le premier et le troisième élément sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités

$$2 - \gamma \leqq \alpha + 1 - \gamma \leqq 0,$$

nous aurons la première de ces deux solutions de forme finie,

$$x^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$
$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{1-\gamma} f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x);$$

la seconde se déduisant de la première, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent.

Ces deux solutions sont évidemment distinctes, si β est fractionnaire; supposons ensuite que β soit entier.

1° Si β est négatif, les deux solutions seront différentes; car, en supprimant le facteur commun $x^{1-\gamma}$, elles sont respectivement des degrés $\alpha + 1 - \gamma$ et $(\alpha - 1) + (\gamma - \alpha - \beta) = \gamma - 1 - \beta$.

2° Si β est positif et que l'on ait

$$\gamma - \alpha - \beta < 0,$$

la première solution est entière, la seconde fractionnaire; elles sont donc distinctes.

3° Si β est positif et que l'on ait

$$\gamma - \alpha - \beta \geqq 0,$$

on en conclura ces deux inégalités semblables aux inégalités (b)

$$\beta - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \beta - 1 \geqq 0,$$

et par conséquent les deux nombres α et β satisfont tout à fait aux mêmes conditions. Il est aisé de voir qu'alors les deux solutions trouvées sont identiques. Mais faisons $\beta = n + \varepsilon$, n étant un nombre entier satisfaisant aux deux inégalités précédentes et ε une très petite quantité; la seconde solution sera différente de la première et l'on pourra la

remplacer par

$$x^{1-\gamma}\,\frac{f(\alpha+1-\gamma,\, n+\varepsilon+1-\gamma,\, 2-\gamma,\, x)-(1-x)^{\gamma-\alpha-n-\varepsilon}f(-\alpha+1,\, -n-\varepsilon+1,\, 2-\gamma,\, x)}{\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et sa vraie valeur donne une seconde solution

$$\begin{aligned}
&x^{1-\gamma}\frac{d}{d\beta}f(\alpha+1-\gamma,\, \beta+1-\gamma,\, 2-\gamma,\, x)\\
&\quad -x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{d}{d\beta}f(-\alpha+1,\, -\beta+1,\, 2-\gamma,\, x)\\
&\quad +x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\log(1-x)f(-\alpha+1,\, -\beta+1,\, 2-\gamma,\, x).
\end{aligned}$$

Comme α et β entrent tout à fait de la même manière, on peut remplacer les deux dérivées par rapport à β par des dérivées par rapport à α.

Deuxième cas. — Supposons encore α, γ entiers, mais satisfaisant à ces deux inégalités

$$(c) \qquad \alpha \leqq 0, \quad \gamma-\alpha \leqq 0;$$

on aura ces deux solutions

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\alpha,\, \gamma-\beta,\, \gamma,\, x),$$

qui seront toujours distinctes, si β n'est pas un nombre entier.

Supposons ensuite que β soit entier.

1° Si l'on a

$$\gamma-\alpha-\beta < 0,$$

la première solution est entière, l'autre est fractionnaire; elles sont donc distinctes.

2° Si l'on a

$$\gamma-\alpha-\beta \geqq 0,$$

on en conclura

$$\beta \leqq \gamma-\alpha \leqq 0,$$

ainsi β sera négatif. Alors distinguons les deux hypothèses $\gamma - \beta > 0$ et $\gamma - \beta \leqq 0$.

Si $\gamma - \beta$ est > 0, comme on a aussi $\gamma - \alpha < 0$, il en résultera $\beta < \alpha$; la première solution sera du degré $-\alpha$, la seconde du degré

$$(\alpha - \gamma) + (\gamma - \alpha - \beta) = -\beta;$$

elles sont donc distinctes.

Dans la seconde hypothèse on aura les inégalités

$$\beta \leqq 0, \quad \gamma - \beta \leqq 0,$$

entièrement analogues à (c), et les deux nombres α, β entrent de la même manière. Les deux solutions sont alors identiques, et l'on en obtiendra une nouvelle comme on a fait dans le premier cas.

Troisième cas. — Supposons que α, β soient deux nombres entiers de signe contraire, et qu'on ait

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \beta \leqq 0.$$

Dans le cas général, on a la solution (n° **2**)

$$x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right);$$

mais, dans le cas actuel, le premier et le troisième élément sont négatifs et satisfont à ces inégalités

$$\beta - \alpha + 1 \leqq \beta \leqq 0;$$

on en conclut ces deux solutions

$$x^{-\beta} f\left(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$x^{\alpha-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(1 - \alpha,\ \gamma - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right),$$

qui sont évidemment distinctes si γ est fractionnaire.

La première est une fonction entière qui ne renferme en facteur aucune puissance de x; la seconde, au contraire, contiendra le facteur $x^{1-\gamma}$; elles sont donc distinctes si γ est un nombre entier différent de 1. Si γ est égal à 1, les deux solutions sont identiques, et l'on en obtiendra une nouvelle en opérant comme dans les deux cas précédents.

Quatrième cas. — Supposons que $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ soient deux nombres entiers et qu'on ait

$$\gamma - \alpha \leqq 0, \quad \gamma - \beta - 1 \geqq 0;$$

ces deux inégalités peuvent s'écrire

$$\beta - \alpha + 1 \leqq \beta + 1 - \gamma \leqq 0,$$

et l'on obtient les deux mêmes formules que dans le cas précédent.

Supposons que γ soit entier. Si l'on a

$$\gamma - \alpha - \beta < 0,$$

les deux solutions sont évidemment distinctes.

Si l'on a

$$\gamma - \alpha - \beta \geqq 0,$$

il en résulte $\beta \leqq 0$. Distinguons deux hypothèses, suivant que $\alpha - 1$ est positif ou négatif.

Si $\alpha - 1$ est $\geqq 0$, nous retomberons sur le troisième cas. Si l'on a

$$\alpha - 1 < 0, \quad \text{d'où} \quad \gamma - 1 \leqq \alpha - 1 < 0,$$

les deux solutions sont identiques; mais on revient à une subdivision du deuxième cas, à moins que γ ne soit égal à 1, et, dans cette dernière supposition, on obtiendra une nouvelle solution, comme on a déjà dit.

Cinquième cas. — Supposons que α, $\gamma - \beta$ soient entiers et qu'on ait

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \beta \leqq 0.$$

Dans le cas général, on a cette solution de la sixième classe,

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x);$$

on en conclut, dans le cas actuel, ces deux solutions

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{1-\gamma}f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$

qui sont évidemment distinctes si γ n'est pas un nombre entier. Nous ne nous arrêterons pas ici, ni dans le cas suivant, à l'hypothèse où les trois nombres α, β, γ sont entiers.

Sixième cas. — Supposons encore que α, $\gamma-\beta$ soient entiers, mais qu'on ait

$$\alpha<0,\quad \gamma-\beta-1>0.$$

Dans le cas général, on a cette solution de la deuxième classe

$$x^{-\alpha}\,F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

et l'on en conclut ces deux solutions distinctes

$$x^{-\alpha}f\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$
$$x^{-\beta}f\left(\beta+1-\gamma,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right).$$

DES DIFFÉRENTS CAS OU DEUX DES CINQ NOMBRES α, β, γ, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ SONT ENTIERS.

6. Il est aisé de reconnaître que l'équation du second ordre peut être intégrée sous forme finie, toutes les fois que deux des nombres α, β, γ, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ sont entiers.

Après les cas déjà examinés, il suffit de considérer les sept cas indiqués par les inégalités suivantes, où tous les premiers membres sont

supposés entiers :

1°	$\alpha < 0,\ \beta < 0;$
2°	$\alpha < 0,\ \gamma - \alpha - 1 > 0;$
3°	$\alpha < 0,\ \gamma - \beta < 0;$
4°	$\alpha - 1 > 0,\ \beta - 1 > 0;$
5°	$\alpha - 1 > 0,\ \gamma - \beta - 1 > 0;$
6°	$\gamma - \alpha < 0,\ \gamma - \beta < 0;$
7°	$\gamma - \alpha - 1 > 0,\ \gamma - \beta - 1 > 0,$

les signes $>$ et $<$ n'excluant pas l'égalité.

Remarquons d'abord que si, dans l'expression $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, α est seul un élément entier négatif, les six solutions suivantes déduites du n° **3**, et qui sont de forme finie, sont identiques :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right),$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right).$$

En effet, on reconnaît aisément que toutes ces fonctions sont entières, et, comme elles ne renferment pas une partie multipliée par $x^{1-\gamma}$, elles sont toutes identiques à la première.

Si β est un nombre entier négatif, on obtiendra de même six solutions de forme finie, identiques à $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, la première et la quatrième du groupe précédent se retrouvant dans ce second groupe. Si donc α, β sont deux nombres entiers négatifs, dix des vingt-quatre fonctions du n° **3** sont de forme finie et elles sont équivalentes.

On voit, d'après cela, facilement que, dans les sept cas que nous

avons à examiner, on ne pourra déduire du Tableau (n° 5) qu'une solution de forme finie.

Or, connaissant une solution P de l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dP}{dx}-\alpha\beta P=0,$$

on en a une seconde

$$(a)\qquad P\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{P^2}\,dx.$$

Remarquons que l'expression

$$x^h(1-x)^g\frac{1}{\varphi(x)}\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle, est intégrable comme la différentielle binôme

$$x^h(1-x)^g\,dx,$$

si h ou g ou $h+g$ est un nombre entier. Faisons donc

$$P=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

dans l'expression (a), et nous obtenons dans les trois premiers cas l'intégrale

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)^2}\,dx,$$

qui peut être déterminée sous forme finie.

7. Mais, pour plus d'uniformité, prenons pour P, dans chacun des sept cas, une expression qui renferme une fonction F dont les deux premiers éléments sont entiers négatifs :

1° $P=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$;

2° $P=x^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{x}\right)$;

3° $P=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{1-x}\right)$

4° $P=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)$;

5° $P=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(1-\alpha,\ \beta+1-\gamma,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1}{x}\right)$;

6° $P=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x)$;

7° $P=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$.

En substituant P dans la formule (a), on trouve que l'expression est intégrable dans chacun des sept cas. De plus, on reconnaîtra facilement que toutes les intégrales qui se présentent prennent la forme

$$(b) \qquad \int x^{-c}(1-x)^{c-a-b-1}\frac{dx}{F(a, b, c, x)^2},$$

ou a, b sont deux nombres entiers négatifs, ou qu'elles s'y ramènent par un changement de la variable, qui se présente de soi-même. On aurait pu aussi ramener le premier élément de la fonction F à être entier négatif et le troisième à être entier positif.

Réciproquement, étant parvenu à intégrer l'équation différentielle dans les cas énumérés au n° 5, on en peut conclure la valeur d'une intégrale. En effet, supposons que γ, α soient deux nombres entiers négatifs satisfaisant aux conditions

$$\gamma < \alpha < 0:$$

on a les deux solutions

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

et l'on en conclut

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x)\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dx}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)^2}$$
$$= C(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) + C' f(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

ou

$$\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dx}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)^2} = C\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)} + C',$$

C' étant une constante arbitraire et C une autre constante qu'on obtiendra en différentiant les deux membres et faisant $x = 1$. Mais l'intégrale (b), où a, b sont deux nombres entiers négatifs, a une valeur plus compliquée renfermant en général des logarithmes et des arc tang.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA VALEUR D'UNE INTÉGRALE INDÉFINIE.

8. D'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, nous avons à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)^2}\, dx,$$

quand α, β sont deux nombres entiers négatifs ou, si l'on préfère, quand α et γ sont deux entiers, le premier négatif, le second positif. Mais considérons plus généralement cette intégrale quand α seulement est un nombre entier négatif $-n$.

La quantité soumise au signe d'intégration peut alors se mettre sous une forme extrêmement remarquable. On a, en effet,

$$(a)\quad \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}}{F(-n, \beta, \gamma, x)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n, \beta, \gamma, x)}\right] + Bx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1},$$

$\chi(x)$ étant un polynôme entier du degré $n-1$,

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1};$$

les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ et la constante B sont des quantités à déterminer.

Voici les valeurs de ces quantités dans les deux cas les plus simples :

1° Si $n = 1$, on trouve

$$A_0 = \frac{\beta}{\beta-\gamma}, \quad B = \frac{\gamma(\beta-1)}{\beta-\gamma}.$$

2° Si $n = 2$, on a

$$A_0 = \frac{(\beta^2-3\beta)\gamma + 2\beta^2 - 2\beta}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}, \quad A_1 = \frac{-(\beta-1)\beta(\beta-1)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)},$$

$$B = \frac{\gamma(\gamma+1)(\beta-2)(\beta-1)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}.$$

Dans le cas général, on a

$$B = \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\times(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{1.2\ldots n(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots(\beta-\gamma-n+1)}.$$

Connaissant B, on en déduira successivement $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

On voit que B sera nul pour les valeurs de β égales à $1, 2, \ldots, n$ B sera infini quand $\beta-\gamma$ aura les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, et la formule (a) ne sera plus applicable ; mais, dans ce cas, posons $\beta = \gamma + k$, k ayant pour valeur un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et employons la formule

$$F(-n, \gamma+k, \gamma, x) = (1-x)^{n-k} F(-k, \gamma+n, \gamma, x);$$

le premier membre de (a) deviendra

$$\frac{x^{-\gamma}(1-x)^{n+k-1}}{F(-k, \gamma+n, \gamma, x)^2},$$

et l'on pourra appliquer à cette expression la formule (a), en changeant n, β en $k, \gamma+n$.

De la formule (a), on conclut qu'on peut, de l'intégrale proposée, extraire une partie entièrement algébrique,

$$\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n, \beta, \gamma, x)},$$

et qu'il n'y aura plus à la compléter que par l'addition de l'intégrale d'une différentielle binôme,

$$(b) \qquad B\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}\,dx,$$

dont on pourra avoir la valeur exacte si γ ou $\gamma-\beta$ ou β est entier.

9. Mais, pour revenir au problème du n° **7**, il suffit de considérer le cas où β est entier négatif ou celui où γ est entier positif. Supposons, par exemple, γ entier positif. On pourra, en intégrant par parties la différentielle binôme, diminuer successivement d'une unité les gran-

deurs des exposants; on extraira ainsi de l'intégrale (b) différentes parties algébriques, et il ne restera plus qu'une intégrale de la forme

$$(c) \qquad C\int x^{-1}(1-x)^{-p}\,dx,$$

C étant une constante et p un nombre compris entre 0 et 1.

Quant à cette dernière intégrale, il est aisé de voir que sa valeur est entièrement transcendante. En effet, supposant β commensurable, posons $p=\frac{h}{m}$, h et m étant deux entiers premiers entre eux et $h<m$; puis faisons

$$1-x=z^m;$$

nous aurons pour l'intégrale (c)

$$Cm\int\frac{z^{m-h-1}}{z^m-1}\,dz.$$

Décomposons la fraction soumise au signe d'intégration en fractions simples, et nous obtiendrons, en désignant par M, N, M_1, N_1, ... des constantes,

$$\frac{z^{m-h-1}}{z^m-1}=\frac{1}{m(z-1)}$$
$$+\frac{Mz+N}{\left(z-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\frac{M_1z+N_1}{\left(z-\cos\frac{4\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{4\pi}{m}}+\ldots.$$

Or, par l'intégration, le premier terme donnera un logarithme, et les suivants donneront chacun un logarithme et un arc tang.

SUR DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DE $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ AU MOYEN DES FONCTIONS f.

10. La solution de l'équation du second ordre qui n'est ni nulle ni infinie pour $x=0$ est $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. On peut, dans plusieurs cas, exprimer cette fonction sous forme finie au moyen des formules du n° 5.

Si α et γ sont deux nombres entiers positifs et que l'on ait

$$\alpha - 1 \geq 0, \quad \gamma - \alpha - 1 > 0,$$

pour obtenir $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, combinons les deux solutions trouvées et qui sont pour $x = 0$ infinies de l'ordre $\gamma - 1$, de manière à abaisser cet ordre d'une unité : et, comme on devra évidemment obtenir ainsi

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

il s'ensuit que l'ordre de la fonction résultante s'abaissera à zéro, et l'on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ - (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{1-\gamma} f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x), \end{aligned} \right.$$

C étant une constante que je déterminerai plus loin.

Supposons que $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ soient deux nombres entiers de signe contraire et qu'on ait

$$\gamma - \beta - 1 \leq 0, \quad \gamma - \alpha \leq 0;$$

prenons celle des deux solutions qui, dans ce cas, n'est ni nulle ni infinie pour $x = 0$, et, en désignant par C une constante, nous aurons

$$(2) \quad \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{\alpha - \gamma} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} f\left(1 - \alpha, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Si α et $\beta - \gamma$ sont deux entiers positifs et qu'on ait ainsi

$$\alpha - 1 > 0, \quad \gamma - \beta \leq 0,$$

on obtiendra de même

$$(3) \quad \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} f(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x).$$

11. Nous allons ensuite prendre pour α, β, γ trois nombres entiers positifs.

Si l'on a l'une des inégalités

$$\gamma - \alpha - 1 > 0, \quad \gamma - \beta - 1 \geq 0,$$

mais l'une d'elles seulement, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera donnée par la formule (1).

Si ces deux inégalités sont satisfaites à la fois, on aura

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & x^{1-\gamma} \frac{d}{d\beta} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ & - x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{d}{d\beta} f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x) \\ & - x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} \log(1 - x) f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x) \end{aligned}$$

En effet, le second membre est solution de l'équation du second ordre, d'après ce que nous avons vu ; il suffit donc de vérifier que, pour $x = 0$, il n'est pas infini de l'ordre $\gamma - 1$. Or la réunion du premier et du second terme est de l'ordre $\gamma - 2$, comme on le vérifie facilement, et le troisième terme est du même ordre.

Enfin, si γ est plus petit que α et β, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera donnée par la formule (3).

On peut aussi remarquer que, si les trois nombres entiers positifs α, β, γ satisfont aux inégalités

$$\gamma - \beta - 1 \geq 0, \quad \gamma - \alpha \geq 0,$$

on peut employer les formules (2) et (3) au lieu de (1).

Ainsi la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ s'exprime très simplement sous forme finie, toutes les fois que α, β, γ sont trois nombres entiers.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES LAISSÉES INDÉTERMINÉES DANS LES N^ES 10 ET 11.

12. Si α, γ sont deux nombres entiers positifs satisfaisant à ces conditions

$$\alpha - 1 > 0, \quad \gamma - \alpha - 1 > 0,$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est fourni par la formule (1) du n° **10**. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ & + \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} \\ & \times (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x). \end{aligned}$$

Il est évident que, si x est très voisin de 1, les deux termes de la seconde formule sont égaux respectivement aux deux termes de la première. On a donc

$$(a) \quad \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} = C f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1),$$

$$(b) \quad \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} = -C f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, 1).$$

Si $\gamma-\alpha-\beta$ est >0, nous nous servirons de la première de ces deux formules, pour déterminer C. Cette inégalité étant satisfaite, on a, par la formule (48) du Mémoire [*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$; *Gauss Werke*, t. III]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

et, si l'on change α, β, γ en $\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma$, les trois nouveaux éléments satisferont à la condition

$$(2-\gamma)-(\alpha+1-\gamma)-(\beta+1-\gamma)>0,$$

et l'on aura

$$(c) \quad F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1) = \frac{\Pi(1-\gamma)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\Pi(-\beta)}.$$

Si l'on suppose que $\gamma-1$ et α sont des entiers positifs, cette expression se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Mais concevons d'abord que ces deux nombres ne soient pas entiers et que leur différence $\gamma-\alpha-1$ le soit seulement; nous aurons

$$\Pi(-\alpha) = -\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\gamma+2)\Pi(-\gamma+1).$$

Or, en supposant ainsi que le premier élément de la fonction (c) est entier négatif et que le troisième élément tend vers un nombre entier négatif plus petit que le premier, le signe F se change évidemment en f (n° 4) et l'on obtient

$$(d)\quad f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\gamma+2)\Pi(-\beta)};$$

donc, d'après la formule (a), on a

$$(e)\qquad C = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\beta)\alpha(\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}(-1)^{\gamma+\alpha+1}$$

ou

$$C = \frac{(\gamma-\alpha)\ldots(\gamma-2)(\gamma-1)\times\alpha(\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{(-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta-2)(\gamma-\beta-1)}(-1)^{\gamma+\alpha-1}.$$

Cette dernière formule sera encore admissible si β est un nombre entier satisfaisant aux conditions

$$\beta-1>0,\quad \gamma-\beta-1<0,$$

desquelles il résulte que le dénominateur ne s'annule pas.

Si $\gamma-\alpha-\beta$ est <0, les trois éléments de

$$f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, 1)$$

satisfont à l'inégalité

$$2-\gamma-(-\alpha+1)-(-\beta+1)>0,$$

et l'on pourrait calculer C au moyen de (b). Or on passe de (a) à (b) en changeant α en $\gamma-\alpha$, β en $\gamma-\beta$ et C en $-$ C.

Faisons donc ce changement dans la formule (e), nous aurons

$$-C = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}(-1)^{\alpha-1},$$

et l'on reconnaît facilement que cette formule est identique à (e). Ainsi la constante C a la même expression, quel que soit le signe de $\gamma-\alpha-\beta$. On en conclut aussi que la formule (d) subsistera quand cette quantité sera négative.

Par un changement de notation, on obtient, pour la formule (d),

$$f(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{(-\alpha - 1 + \gamma)(-\alpha - 2 + \gamma)\ldots(\gamma + 1)\gamma\Pi(\gamma - \beta - 1)},$$

quel que soit le signe de $\gamma - \alpha - \beta$.

13. Nous pouvons écrire ainsi l'équation (1)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = A \frac{\Pi(-\beta)}{\Pi(\gamma - \beta - 1)} x^{1-\gamma} \\ \times [f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ - (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x)] \end{aligned}$$

avec

$$A = (-1)^{\gamma + \alpha + 1} \frac{\Pi(\gamma - 1)\alpha(\alpha + 1)\ldots(\gamma - 2)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)}.$$

On peut déduire la formule (4) de celle-ci, en faisant $\beta = n + \varepsilon$, supposant n entier et faisant tendre ε vers zéro; alors la quantité entre crochets tendra vers zéro et l'on aura

$$\Pi(-\beta) = \Pi(-n - \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{\Pi(n + \varepsilon - 1)} \frac{1}{\varepsilon}.$$

En passant à la limite, on obtiendra pour la constante C de la formule (4)

$$C = (-1)^{\gamma - \alpha - \beta - 1} \frac{\Pi(\gamma - 1)\Pi(\gamma - 2)}{\Pi(\alpha - 1)\Pi(\beta - 1)\Pi(\gamma - \alpha - 1)\Pi(\gamma - \beta - 1)}.$$

On déterminera facilement la constante C dans les formules (2) et (3).

SUR LA PÉRIODICITÉ DE LA FONCTION $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$.

14. Dans les applications, la variable x, dans $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, représente souvent le carré d'un sinus. Examinons dans quels cas la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ possède, par rapport à φ, la période 2π.

Remarquons d'abord que, si l'on prend pour φ un angle compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, puis qu'on change le signe de φ, la fonction conservera sa valeur; ainsi la fonction est connue pour toutes les valeurs de φ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Faisons ensuite franchir à φ la valeur $\frac{\pi}{2}$. Si nous posons

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}, \quad B = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi) = {} & A\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, \cos^2\varphi) \\ & + B(\cos\varphi)^{2(\gamma-\alpha-\beta)}\,F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Pour que la fonction ait la période 2π, il faut, comme on le voit aisément, que, pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$, la fonction ait la même valeur ou des valeurs égales et de signe contraire.

Supposons *en premier lieu* que la fonction obtienne des valeurs égales et de signe contraire pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$. Le premier terme de la formule précédente est égal à

$$A\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, \sin^2\varphi')$$

pour ces deux valeurs de φ et doit, par conséquent, s'annuler. On aura donc $A = 0$, et, en se reportant à la valeur de A, on obtient

$$\Pi(\gamma-\alpha-1) = \infty \quad \text{ou} \quad \Pi(\gamma-\beta-1) = \infty,$$

c'est-à-dire

$$\gamma-\alpha-1 = -E \quad \text{ou} \quad \gamma-\beta-1 = -E,$$

E étant un nombre entier positif.

Supposons, par exemple, que l'on ait la première égalité

$$\gamma-\alpha = -E+1;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi) \\ &\quad = B(\cos\varphi)^{2-2E}(\cos\varphi)^{-2\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Pour que cette quantité change simplement de signe quand $\cos\varphi$ change de signe, il faut qu'on ait

$$(-1)^{2\beta} = -1;$$

il en résulte que l'on a

$$\beta = \frac{p}{2q},$$

p, q étant deux nombres entiers impairs premiers entre eux.

La fonction prend réellement q valeurs distinctes; mais la valeur réelle aura 2π pour période. (Les valeurs imaginaires peuvent d'ailleurs être aussi considérées comme périodiques.) La fonction n'aura qu'une valeur qui sera réelle si l'on a

$$\beta = \frac{p}{2}.$$

Supposons *en second lieu* que la fonction prenne des valeurs égales et de même signe pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$. Alors la période se réduira à π. On pourra satisfaire à cette condition de deux manières

Il suffira, en effet, de faire $B = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha - 1 = -E \quad \text{ou} \quad \beta - 1 = -E,$$

E étant un nombre entier positif.

La fonction F jouira aussi de la même propriété si l'on a

$$(-1)^{2(\gamma-\alpha-\beta)} = 1;$$

il en résulte

$$\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q},$$

p, q étant deux nombres entiers premiers entre eux et q impair. La fonction F prendra q valeurs distinctes après le passage par $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

mais la valeur réelle aura la période π. Si $q = 1$ ou si $\gamma - \alpha - \beta$ est un nombre entier, les deux termes de la formule qui donne

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$$

deviennent infinis; toutefois cette formule peut être transformée pour ce cas particulier, et l'on peut reconnaître facilement que cette fonction a encore la période π.

15. Pour terminer, remarquons que l'équation différentielle où A, B, C, D, E sont des constantes quelconques,

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (A + B\sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\frac{dz}{d\varphi} + (C + D\sin^2\varphi + E\sin^4\varphi)z = 0,$$

se ramène facilement à l'équation de la série hypergéométrique

$$x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dP}{dx} - \alpha\beta P = 0.$$

On le démontrera facilement en faisant dans cette dernière

$$x = \sin^2\varphi, \quad P = z\sin^\lambda\varphi\cos^\mu\varphi;$$

on obtiendra une équation de la forme de la première équation différentielle, et, en faisant l'identification, on trouvera que λ, μ sont donnés par ces deux équations du second degré

$$\lambda^2 - (A - 1)\lambda + C = 0,$$

$$\mu^2 + (A + B + 1)\mu + C + D + E = 0;$$

puis on aura

$$4\alpha\beta = (\lambda + \mu)^2 + B(\lambda + \mu) + E, \quad \alpha + \beta = -\lambda - \mu - \frac{B}{2},$$

$$2\gamma = A - 2\lambda + 1.$$

On reviendra donc bien à la solution de l'équation de la série hypergéométrique.

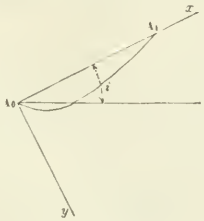
Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue;

PAR M. H. RESAL.

---

1. Soient

A_0, A_1 l'appui inférieur et l'appui supérieur;
x_1 la distance de ces appuis;
i l'inclinaison sur l'horizon de la droite A_0A_1 prise pour axe des x:



A_0y la perpendiculaire en A_0 à cette droite comprise dans le plan vertical de A_0A_1;
p le poids de l'unité de longueur de la chaîne;
T la tension en un point quelconque (x, y) de l'arc A_0A_1;
ds l'élément de cet arc.

Nous distinguerons respectivement par les indices o et 1 les quantités qui se rapportent aux points A_0 et A_1. Le poids p ayant pour composantes $-p\sin i$, $p\cos i$ suivant A_0x, A_0y, nous aurons, d'après des formules connues,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{T}\dfrac{dx}{ds}}{ds} = p\sin i, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{T}\dfrac{dy}{ds}}{ds} = -p\cos i. \end{cases}$$

Nous supposerons, pour des motifs que nous ferons connaître plus loin, que $\frac{dy}{dx}$ et p, qui sont du même ordre de grandeur, sont assez petits pour que l'on puisse négliger celles de leurs puissances qui sont supérieures à la seconde, ce qui nous conduit à prendre

$$(2)\quad \frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}.$$

A ce degré d'approximation, nous pourrons substituer aux équations (1) les suivantes :

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \mathrm{T}_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + xp\sin i,$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds} = -xp\cos i + \mathrm{C},$$

en désignant par C une constante arbitraire. On en déduit

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-p\cos i + \mathrm{C}}{\mathrm{T}_0\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0 + xp\sin i}.$$

Nous allons maintenant avoir recours à la méthode des approximations successives.

2. *Première approximation.* — En négligeant les termes du second

ordre et supposant par suite $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1$, l'équation (4) nous donne

$$(4') \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-p\cos i + C}{T_0 + xp\sin i} = -\frac{p\cos i}{T_0}x + \frac{C}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{T_0}x\right);$$

d'où, en exprimant que $y = 0$ pour $x = 0$,

$$y = -x^2\frac{p\cos i}{2T_0} + \frac{Cx}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x\right).$$

Mais on doit avoir $y = 0$ pour $x = x_1$; par suite,

$$(5) \qquad \frac{C}{T_0} = \frac{x_1 p\cos i}{2T_0\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x_1\right)} = \frac{p\cos i}{2T_0}x_1,$$

et l'équation (4') se réduit à la suivante :

$$(4'') \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left(\frac{x_1}{2} - x\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons de voir, que nous avons supposé implicitement, dès le début, que la chaîne est assez tendue et que la longueur de l'arc A_0A_1 est assez restreinte pour que le rapport $\frac{px_1}{T_0}$, qui est sensiblement celui du poids de cet arc à sa tension en A_0, soit petit.

5. *Deuxième approximation.* — En conservant maintenant les termes du second ordre, la première des équations (2) donne successivement

$$T\left(1 - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right) = T_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_0\right] + xp\sin i,$$

$$T = T_0\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{dy^2}{dx^2} - \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_0\right]\right\} + xp\sin i;$$

d'où, en ayant égard à la valeur (4''),

$$(6) \qquad T = T_0\left[1 - \frac{p^2\cos^2 i}{2T_0^2}x(x_1 - x)\right] + xp\sin i.$$

La plus grande valeur de la tension correspond évidemment à $x = x_1$, et a pour expression

$$T_1 = T_0 + x_1 p \sin i. \tag{6'}$$

Comme, d'après la formule (5), $\frac{C}{T_0}$ est du premier ordre, il nous est permis de supposer $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1$ dans l'équation (4) qui devient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{T_0}\,\frac{-xp\cos i + C}{1 + \frac{p\sin i}{T_0}x} \\ &= -\frac{p\cos i}{T_0}x + x^2\frac{p^2}{T_0^2}\sin i\cos i + \frac{C}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{T_0}x\right); \end{aligned}\right. \tag{4'''}$$

d'où

$$y = -x^2\frac{p\cos i}{2T_0} + x^3\frac{p^2}{3T_0^2}\sin i\cos i + \frac{Cx}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x\right).$$

En exprimant que $y = 0$ pour $x = x_1$, on trouve

$$\frac{C}{T_0} = \frac{\frac{p\cos i}{2T_0}x_1 - x_1^2\frac{p^2\sin i\cos i}{3T_0^2}}{1 - x\frac{p\sin i}{2T_0}} = x_1\frac{p\cos i_1}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right),$$

et l'équation (4''') devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left[\frac{x_1}{2} - x + \frac{p\sin i}{T_0}\left(x^2 - \frac{xx_1}{2} - \frac{x_1^2}{12}\right)\right]. \tag{7}$$

On voit facilement que nous avons substitué à l'arc de chaînette A_0A_1 un arc de parabole du troisième degré.

Soient ε_0 l'inclinaison de la tangente en A_0 sur l'axe Ox, et ε_1 l'angle aigu formé par la tangente en A_1 avec le même axe; nous avons

$$\operatorname{tang}\varepsilon_0 = \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right),$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon_1 = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right).$$

Si l'on remarque que l'on peut écrire

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tang}\varepsilon_0 - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varepsilon_0,$$

on trouve

$$(8)\qquad \varepsilon_0 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left[1 - \frac{px_1}{6T_0}\left(\sin i + \frac{\cos i}{2}\right)\right],$$

et de même

$$(9)\qquad \varepsilon_1 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left[1 - \frac{px_1}{6T_0}\left(5\sin i + \frac{\cos i}{2}\right)\right],$$

par suite,

$$(10)\qquad \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{p^2x_1^2\sin 2i}{6T_0}.$$

4. Les considérations précédentes s'appliquent évidemment au cas d'une chaîne reposant sur deux poulies d'un petit diamètre dont les axes horizontaux seraient projetés en A_0, A_1, et l'on peut ainsi tenir compte dans la théorie de la grue du poids de la partie inclinée de la chaîne.

Le point A_0 peut aussi être l'attache de la chaîne à une masse résistante, comme cela a lieu dans le halage des bateaux et dans les ponts-levis.

Si les formules (8) et (9) présentent quelques différences avec celles de MM. Peaucelier et Wagner, résultant de considérations géométriques, et que nous avons reproduites dans notre *Traité de Mécanique générale* (t. VI), cela tient à la régularité avec laquelle nous avons conduit les approximations.

La théorie que nous venons d'exposer n'offre d'ailleurs de l'intérêt que lorsque la tension est voisine du maximum qu'elle doit atteindre et qui est fixé d'avance; quand on emploie le fer, on a à peu près

$\frac{p}{T_0} = \frac{8}{6 \times 1000} = 0{,}00133$, et, en supposant même $x_1 = 30^m$, on voit que $\frac{px_1}{T_0}$ serait de l'ordre $\frac{1}{100}$, fraction dont on peut, dans les applications, négliger le carré, et *a fortiori* le cube, devant l'unité.

Sur une formule générale des intégrales définies;

PAR M. A. DAWIDOFF,

Président de la Société mathématique et professeur à l'Université de Moscou.

J'ai l'intention d'indiquer dans cet article un procédé pouvant avoir un assez grand nombre d'applications. Il permet de rapprocher entre elles plusieurs propositions isolées de l'analyse et de les réunir sous un même point de vue.

1. Soient $F(x)$ une fonction algébrique quelconque entière de degré n et $f(x)$ une autre fonction algébrique entière de degré moindre que n. Supposons que les n racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation

$$F(x) = 0$$

soient toutes différentes entre elles et différentes des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

en fractions simples

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{1}{x-\alpha},$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les racines α. En multipliant les deux

membres de cette égalité par $F(x)$, nous avons

$$f(x) = \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}.$$

Désignons par $\varphi(x)$ une fonction quelconque, dont le module ρ de discontinuité soit plus grand que le module des racines α; $\varphi(x)$ alors peut être développée en série suivant les puissances croissantes de x, dans les limites des racines de l'équation $F(x) = 0$.

Soient $f(x)$ la somme des n premiers termes de ce développement et ε_x le reste, qui tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment :

$$\varphi(x) = f(x) + \varepsilon_x.$$

Si dans l'équation précédente on remplace $f(x)$ par $\varphi(x) - \varepsilon_x$, on a

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha} + e \tag{I}$$

où

$$e = \varepsilon_x - \sum \frac{\varepsilon_\alpha F(x)}{F'(\alpha)(x-\alpha)}.$$

Si, n augmentant indéfiniment, $F(x)$ reste finie, le reste e tendra vers zéro et sera de même ordre de grandeur que ε_x. Cela résulte de ce que la somme des termes

$$\frac{F(x)}{F'(\alpha)(x-\alpha)},$$

étendue à toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, est égale à 1, mais, étendue seulement à quelques-unes d'entre elles, conserve une valeur finie.

L'équation (I) fait voir que la somme

$$\sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

exprime $\varphi(x)$ avec la précision des n premiers termes de son développement.

Soient a et b deux quantités moindres aussi que le module ρ; multi-

plions les deux membres de l'équation (I) par dx et intégrons entre les limites a et b; nous trouvons

$$\text{(II)} \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha} + e_1,$$

où e_1 est une quantité tendant vers zéro si n augmente indéfiniment.

L'équation (II) fait aussi voir que la somme

$$\sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

exprime l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

avec la précision de n termes de développement de la fonction sous-intégrale.

2. En désignant par z une quantité dont le module soit plus grand que le plus grand des modules des racines α, posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x}.$$

L'égalité (I) devient alors

$$\frac{1}{z-x} = \sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

et fait voir que les développements suivant les puissances croissantes de x et les puissances décroissantes de z de la fraction $\frac{1}{z-x}$ et de la somme

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

coïncident dans les premiers n termes.

L'équation (II), en supposant que les limites a et b soient moindres que z, conduit à l'expression

$$\log \frac{z-a}{z-b} = \sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

qui fait voir que, tout arbitraire que soit la fonction $F(x)$, le développement de la somme

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

suivant les puissances décroissantes de z, coïncide dans ses n premiers termes, c'est-à-dire jusqu'à $\frac{1}{z^n}$, avec le développement

$$\log \frac{z-a}{z-b}$$

suivant les puissances décroissantes de z.

Les égalités (I) et (II), par suite de leur dépendance de la fonction arbitraire $F(x)$, peuvent avoir des applications très variées.

Faisant un choix convenable du polynôme $F(x)$ et passant à la limite $n = \infty$, on en déduit presque tous les théorèmes connus sur les intégrales définies. Je m'arrêterai à quelques-unes de ces applications, basées sur un choix particulier de la fonction $F(x)$.

3. Soit p un nombre, compris entre 0 et la plus grande des limites a et b, et faisons

$$F(x) = x^n - p^n.$$

Si l'on désigne par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les $n^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité, les racines de l'équation $F(x) = 0$ pourront être exprimées par $\alpha = pr$, et le terme général de la seconde partie de l'égalité (II) sera alors

$$\frac{\varphi(pr)}{F'(pr)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-pr} = \frac{\varphi(pr)}{n(pr)^{n-1}} \int_a^b [x^{n-1} + pr\,x^{n-2} + (pr)^2 x^{n-3} \ldots + (pr)^{n-1}]\,dx$$

$$= \frac{pr\,\varphi(pr)}{n} \left[\frac{x}{pr} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{pr}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{pr}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{pr}\right)^n \right]_a^b.$$

Mais pour tout x compris entre les limites a et b, nous avons

$$\frac{x}{pr} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{pr}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{pr}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{pr}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{x}{pr}\right) + e_x,$$

où e_x désigne une quantité tendant vers zéro si n augmente indéfiniment. De là on a

$$\frac{\varphi(pr)}{F'(pr)}\int_a^b \frac{F(x)dx}{x-pr} = \frac{pr\varphi(pr)}{n}\left(\log\frac{pr-a}{pr-b} + e_b - e_a\right),$$

et l'équation (II) condnit à l'expression suivante

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{n}\left[pr_1\varphi(pr_1)\log\frac{pr_1-a}{pr_1-b}\right.$$
$$\left. + pr_2\varphi(pr_2)\log\frac{pr_2-a}{pr_2-b} + \cdots + pr_n\varphi(pr_n)\log\frac{pr_n-a}{pr_n-b}\right] + e_1,$$

où e_1 désigne une quantité, tendant vers zéro si n augmente indéfiniment.

4. Soit p un nombre moindre que le module de discontinuité de la fonction donnée $\varphi(x)$ et posons

$$F(x) = x^n - p^n.$$

Désignons par r_k l'une des racines de degré n de l'unité et posons

$$\sqrt{-1} = i.$$

Alors

$$r_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

où k désigne un des nombres entiers depuis o à $n-1$; nous aurons (équat. I)

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(pr_k)}{n(pr_k)^{n-1}}\,\frac{x^n - p^n}{x - pr_k}.$$

En faisant $x = 0$, on a

$$\varphi(0) = \frac{1}{n}\sum \varphi\left(pe^{\frac{2k\pi i}{n}}\right).$$

Faisant enfin $\frac{2\pi k}{n} = u$ et passant à la limite $n = \infty$, nous remplaçons

la somme depuis 0 à $n-1$ par une intégrale entre les limites 0 et 2π et posons $\frac{2\pi}{n} = du$.

Nous obtenons de cette manière le théorème connu de Cauchy sur les intégrales définies

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(pe^{ui})\,du.$$

5. En désignant par m un nombre quelconque et par n un nombre augmentant indéfiniment, posons

$$F(x) = \lim_{n=\infty} mx\left[1-\left(\frac{mx}{\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{mx}{2\pi}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{mx}{n\pi}\right)^n\right] = \sin mx.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$, au nombre de $2n+1$, sont comprises dans l'expression $\alpha_k = \frac{k\pi}{m}$, si l'on donne à k toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Remarquons que $-n\pi$ et $+n\pi$ représentent les limites de la variabilité possible du produit mx, de manière que, m croissant indéfiniment, x doit être compris entre les limites $-\frac{n\pi}{m}$ et $+\frac{n\pi}{m}$.

Désignons par p une quantité positive moindre que $\frac{n\pi}{m}$

$$p < \frac{n\pi}{m},$$

nous trouvons (équat. I)

$$\varphi(x-p) = \frac{1}{m}\sum_{-n}^{+n} \frac{\varphi(\alpha_k - p)\sin mx}{\cos m\alpha_k(x-\alpha_k)}.$$

Mais, comme

$$\frac{\sin mx}{\cos m\alpha_k} = \frac{\sin[m(x-\alpha_k)+m\alpha_k]}{\cos m\alpha_k} = \sin m(x-\alpha_k),$$

en posant $x = p$, nous trouvons

$$\varphi(0) = \frac{1}{m}\sum_{-n}^{+n} \varphi(\alpha_k - p)\frac{\sin m(p-\alpha_k)}{p-\alpha_k}.$$

Passant maintenant à la limite $m = \infty$, posons $\alpha_k - p = u$ et $\frac{\pi}{m} = du$. L'expression $\frac{n\pi}{m}$ devient alors une quantité positive indéterminée, de sorte que, en posant

$$\frac{n\pi}{m} + p = a, \quad \frac{n\pi}{m} - p = b,$$

a et b peuvent être considérées comme des quantités positives tout à fait arbitraires.

L'équation précédente se réduit donc à ce qui suit

$$\lim \int_a^b \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \pi \varphi(0),$$

à la condition que $\varphi(x)$ soit développable en série entre les limites $-a$ et b.

En désignant par a_1 et b_1 deux quantités positives, nous trouvons, par suite de ce qui précède,

$$\lim \int_b^{b_1} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0, \quad \lim \int_{-a}^{-a_1} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0.$$

Prenant

$$\varphi(x) = 1,$$

nous avons

$$\lim \int_{-a}^{a} \sin mu \frac{du}{u} = 2 \lim \int_0^a \sin mu \frac{du}{u} = \pi$$

ou

$$\lim \int_0^a \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}.$$

Désignant ensuite par ε une quantité positive décroissant indéfiniment, nous trouvons

$$\lim \int_{-a}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \lim \int_{\varepsilon}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} + \lim \int_0^{\varepsilon} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u}.$$

Mais, comme

$$\lim \int_{\varepsilon}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0$$

et

$$\lim \int_{0}^{\varepsilon} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \varphi(0) \lim \int_{0}^{\varepsilon} \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

nous avons

$$\lim \int_{0}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

6. Soit

$$F(x) = \lim x \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2\right] = \sin x,$$

et désignons les racines de l'équation $F(x) = 0$ par $\alpha_k = k\pi$, en étendant k de $-n$ à $+n$.

Nous avons, par l'équation I,

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(\alpha) \sin x}{\cos \alpha (x - \alpha)}.$$

Soit h une quantité positive quelconque et m un nombre impair croissant indéfiniment. En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $\frac{\sin mx}{\sin x} dx$, intégrons entre les limites 0 et h. Nous trouvons

$$\int_{0}^{h} \frac{\varphi(x) \sin mx \, dx}{\sin x} = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\cos \alpha} \int_{0}^{h} \frac{\sin mx}{x - \alpha} dx.$$

Mais, m étant impair,

$$\frac{\sin mx}{\cos \alpha} = \frac{\sin[m(x - \alpha) + m\alpha]}{\cos \alpha} = \sin m(x - \alpha) \frac{\cos m\alpha}{\cos \alpha} = \sin m(x - \alpha);$$

par conséquent,

$$\lim \int_{0}^{h} \frac{\varphi(x) \sin mx \, dx}{\sin x} = \lim \sum \varphi(\alpha) \int_{0}^{h} \frac{\sin m(x - \alpha)}{x - \alpha} dx$$

$$= \lim \sum \varphi(\alpha) \int_{-\alpha}^{h-\alpha} \sin mu \frac{du}{u}.$$

En remarquant que l'intégrale

$$\lim \int_{-\alpha}^{h-\alpha} \sin mu \frac{du}{u}$$

est égale à $\frac{\pi}{2}$ quand $\alpha = 0$, égale à π lorsque $\alpha < h$ et se réduit à zéro quand $\alpha > h$, désignons par $p\pi$ le plus grand multiple de π qui est moindre que h.

L'équation précédente nous conduit alors au théorème connu

$$\lim \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin m.x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} [\varphi(0) + 2\varphi(\pi) + 2\varphi(2\pi) + \ldots + 2\varphi(p\pi)]$$

ayant lieu pour toute fonction $\varphi(x)$, développable en série entre les limites 0 et h.

7. Faisons dans l'équation (I)

$$F(x) = \cos nx.$$

Désignant les racines de l'équation $\cos nx = 0$ par $\alpha = \frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}$ et comprenant par k tout nombre entier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, nous trouvons

$$\varphi(x) = -\frac{1}{n} \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\sin n\alpha} \frac{\cos nx}{x-\alpha}.$$

Mais, remarquant que

$$\frac{\cos nx}{\sin n\alpha} = \frac{\cos[n(x-\alpha)+n\alpha]}{\sin n\alpha} = -\sin n(x-\alpha)$$

et que

$$\frac{\sin n(x-\alpha)}{x-\alpha} = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \cos u(x-\alpha)\, du,$$

passons à la limite $n = \infty$, en faisant $d\alpha = \frac{\pi}{n}$ et désignant par a une quantité arbitraire positive; nous trouvons

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(x-\alpha)\, du,$$

à la condition que x soit compris entre $-a$ et $+a$.

Pour $a = \infty$ on trouve le théorème connu de Fourier

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-\alpha)\,du.$$

8. En désignant par n un nombre impair, posons

$$F(x) = x^n - 1.$$

Les racines du polynôme $F(x)$ seront

$$\alpha = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

si l'on désigne par k tous les nombres entiers depuis $-\frac{n-1}{2}$ jusqu'à $\frac{n-1}{2}$. Soit $\varphi(x)$ une fonction donnée, développable en série entre les limites $q-1$ et $q+1$, on a alors (équat. I)

$$\varphi(x+q) = \frac{1}{n}\sum\frac{\varphi\left(q+e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}{e^{\frac{2(n-1)k\pi i}{n}}}\,\frac{x^n-1}{x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}}.$$

Désignant par p un nombre moindre que 1 et faisant $x = p$ et $\frac{2k\pi}{n} = u$, passant à la limite $n = \infty$, nous trouvons, en remarquant que $\frac{2\pi}{n} = du$,

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(p+q) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\varphi(q+e^{ui})\,du}{1-pe^{-ui}}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{\varphi(q+e^{ui})}{1-pe^{-ui}}+\frac{\varphi(q+e^{-ui})}{1-pe^{ui}}\right]du.\end{aligned}\right.$$

Sous les mêmes conditions on trouve (équat. I)

$$\frac{\varphi(x+q)}{1-px} = \frac{1}{n}\sum\frac{\varphi\left(q+e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}{\left(1-pe^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)e^{\frac{2(n-1)k\pi i}{n}}}\,\frac{x^n-1}{x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}}.$$

Faisant $x = 0$, $\frac{2k\pi}{n} = u$ et passant à la limite, on a

$$\text{(B)} \qquad \varphi(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\varphi(q+e^{ui})}{1-pe^{ui}} + \frac{\varphi(q+e^{-ui})}{1-pe^{-ui}}\right]du.$$

Les équations (A) et (B) constituent le théorème connu de Poisson sur les intégrales définies [1]. Elles ont lieu pour $p < 1$ et à la condition que la fonction $\varphi(x)$ soit développable en série entre les limites $q-1$ et $q+1$.

9. Soit n un nombre impair, et faisons

$$F(x) = x^n + 1.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ seront

$$\alpha = -e^{\frac{2k\pi i}{n}} = -e^{2a_k i}$$

où $a_k = \frac{\pi k}{n}$ et k est un nombre entier quelconque depuis $-\frac{(n-1)}{2}$ jusqu'à $\frac{n-1}{2}$. Appliquons l'équation (I) à l'intégrale

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx,$$

où m désigne une quantité réelle quelconque.

Soit $m = p + r$, où p est le plus grand des nombres entiers compris dans m, et r une quantité positive moindre que 1. L'équation (I) conduit à l'égalité suivante :

$$x^{p-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{n}\sum e^{2pa_k i}\varphi[u(1+e^{2a_k i})]\frac{x^{n-1}}{x+e^{2a_k i}}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par x^r, nous trou-

---

[1] Bertrand, *Calcul intégral*, p. 169.

vons

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{n}\sum e^{2pa_k i}\varphi[u(1+e^{2a_k i})]\frac{x^r(x^n+1)}{x+e^{2a_k i}}.$$

Passant à la limite $n=\infty$, posons $a_k = v$ et $\frac{\pi}{n} = dv$, nous avons, pour $x<1$,

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\frac{x^r\,dv}{x+e^{2vi}}.$$

Mais, remarquant que pour $x<1$ l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\frac{dv}{1+xe^{2vi}}$$

se réduit à zéro, parce que la fonction sous-intégrale peut être développée en série suivant les puissances croissantes de e^{2vi}, remplaçons l'équation précédente par

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\left(\frac{x^r}{x+e^{2vi}}+\frac{x^{-(r+1)}}{1+xe^{2vi}}\right)dv.$$

En multipliant ensuite par dx, nous intégrons entre les limites 0 et 1. Remarquons que x, étant remplacé par $\frac{1}{x}$, donne

$$\int_0^1 \frac{x^{-(r+1)}\,dx}{1+x\,e^{2vi}} = \int_1^\infty \frac{x^r\,dx}{x+e^{2vi}},$$

par conséquent,

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\,dv\int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{x+e^{2vi}}.$$

Enfin, remplaçant dans le second membre de cette équation x par

$x e^{2vi}$ et remarquant que

$$\int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(r+1)\pi} = \frac{\pi}{\sin(m-p+1)\pi} = -\frac{\pi}{\sin m\pi \cos p\pi}$$

et que

$$1 + e^{2vi} = 2\cos v e^{vi},$$

nous trouvons l'équation suivante

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = \frac{1}{\sin m\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varphi(2u\cos v e^{vi})e^{2mvi}\,dv,$$

connue sous le nom de *formule de Kummer* (¹).

Quand m est nombre entier, le second membre se réduit à $\frac{0}{0}$. Mais, en prenant le rapport des dérivées du numérateur et du dénominateur suivant m, nous trouvons, pour m entier,

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = \frac{2i\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(2u\cos v e^{vi})e^{2mvi}v\,dv.$$

Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu directement de l'équation (11) pour m entier

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx$$
$$= -\frac{\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi[u(1+e^{2vi})]e^{2mvi}\,dv\int_0^1 \frac{dx}{x+e^{2vi}}.$$

En remarquant que l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi[u(1+e^{2vi})]e^{2mvi}\frac{dv}{x+e^{-2vi}},$$

(¹) BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 175.

se réduit à zéro, parce que la fonction sous-intégrale peut être développée en série suivant les puissances croissantes de e^{2vi}, représentons l'égalité précédente par

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx$$

$$= -\frac{\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2mvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\,dv\int_0^1\left(\frac{1}{x+e^{2vi}}-\frac{1}{x+e^{-2vi}}\right)dx$$

$$= \frac{2i\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2mvi}\varphi(2u\cos v e^{vi})v\,dv.$$

Les résultats obtenus ci-dessus découvrent un rapport intime entre les formules de Cauchy, de Poisson et de Kummer et leur dépendance des racines de l'unité

10. Les équations (I) et (II) conduisent de même aux formules connues du calcul approché des intégrales définies.

Supposons que les limites de l'intégration a et b soient, par l'introduction d'une nouvelle variable y,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}y,$$

réduites à -1 et $+1$, et appliquons l'équation (II) à la fonction de Legendre

$$\phi(x) = \mathrm{N}\,d_x^n(x^2-1)^n,$$

à la condition que $\phi(1)=1$. Comme $\phi(x)$ ne contient que les degrés pairs ou impairs de x, suivant que n est pair ou impair, $\phi(-1)$ sera égale à $+1$ ou -1.

Notons que $\phi(x)$ se distingue par deux propriétés principales : 1° que toutes les n racines de l'équation $\phi(x)=0$ sont réelles, différentes entre elles et comprises entre -1 et $+1$; 2° que pour toute fonction algébrique entière $f_1(x)$ de degré moindre que n,

$$\int_{-1}^{+1}\phi(x)f_1(x)\,dx = 0.$$

Désignons par $f(x)$ un polynôme de degré n, dont toutes les racines seraient différentes entre elles, différentes des racines du polynôme $\phi(x)$ et comprises aussi entre -1 et $+1$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation $\phi(x) = 0$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, et prenons dans l'équation (II), pour $F(x)$, le polynôme $\phi(x).f(x)$ de degré $2n$:

$$F(x) = \phi(x).f(x).$$

Cette équation s'exprimera alors par

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)\phi'(\alpha)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\phi(x)\,dx}{x-\alpha}$$
$$+ \sum \frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)\phi(\beta)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\phi(x)\,dx}{x-\beta}.$$

Comme $f(x)$ se divise par $x - \beta$ et que le quotient obtenu est un polynôme de degré $n - 1$, alors

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{x-\beta}\phi(x)\,dx = 0;$$

par conséquent, la partie de l'équation précédente, dépendant des racines β, s'évanouit.

Quant à la seconde partie, supposons qu'en divisant $f(x)$ par $x - \alpha$ on obtienne au quotient le polynôme $f_1(x)$ de degré $n - 1$:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = f_1(x) + \frac{f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Par suite,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{x-\alpha}\phi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f_1(x)\phi(x)\,dx$$
$$+ f(\alpha)\int_{-1}^{+1} \frac{\phi(x)}{x-\alpha}\,dx = f(\alpha)\int_{-1}^{+1} \frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha},$$

et l'équation précédente devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\phi'(\alpha)} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha}.$$

Elle ne dépend ni des racines β, ni du polynôme f et prouve que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx,$$

correspondant à $2n$ termes de développement de la fonction sous-intégrale, s'exprime par la somme seulement de n termes.

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha}$$

peut être calculée de la manière suivante.

Remarquons que

$$\frac{1}{\Phi(x)} = \frac{1}{\Phi'(\alpha_1)(x-\alpha_1)} + \frac{1}{\Phi'(\alpha_2)(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{1}{\Phi'(\alpha_n)(x-\alpha_n)}.$$

En multipliant les deux parties de cette égalité par $\frac{[\Phi(x)]^2}{x-\alpha_1}\,dx$ et intégrant entre les limites -1 et $+1$, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = \int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{\Phi'(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2} + \int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{\Phi'(\alpha_2)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}$$
$$+ \cdots + \int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{\Phi'(\alpha_n)(x-\alpha_1)(x-\alpha_n)}.$$

Mais, comprenant par k et l des nombres différents entre eux, on a généralement

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{(x-\alpha_k)(x-\alpha_l)} = \frac{1}{\alpha_k-\alpha_l}\int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{x-\alpha_k}$$
$$- \frac{1}{\alpha_k-\alpha_l}\int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{x-\alpha_l} = 0,$$

$\frac{\Phi(x)}{x-\alpha_k}$ et $\frac{\Phi(x)}{x-\alpha_l}$ étant toujours des polynômes de degré $n-1$.

Par suite, la seconde partie de l'équation précédente ne conser-

vera que le terme dont la fonction sous-intégrale aura pour diviseur $(x-\alpha_1)^2$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = \frac{1}{\Phi'(\alpha_1)} \int_{-1}^{+1} \frac{[\Phi(x)]^2\,dx}{(x-\alpha_1)^2}.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = -\frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\Phi'(\alpha_1)} + \frac{2}{\Phi'(\alpha_1)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,\Phi'(x)\,dx}{x-\alpha_1}.$$

Mais, en divisant $\Phi'(x)$ par $x-\alpha_1$ on obtient pour quotient un polynôme de degré $n-2$ et pour reste $\Phi'(\alpha_1)$. La partie de l'intégrale dependante du quotient devient zéro, et de là

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = -\frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\Phi'(\alpha_1)} + 2\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = \frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\Phi'(\alpha_1)}.$$

Par conséquent l'équation obtenue ci-dessus et servant à déterminer l'intégrale prend la forme suivante

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = 2\sum \frac{\varphi(\alpha)}{(1-\alpha^2)\,[\Phi'(\alpha)]^2}$$

ou, posant

$$\frac{2}{(1-\alpha_k^2)\,[\Phi'(\alpha_k)]^2} = A_k,$$

on a

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = A_1\varphi(\alpha_1) + A_2\varphi(\alpha_2) + \ldots + A_n\varphi(\alpha_n).$$

Les coefficients A_1, A_2, ..., A_n ont été déterminés par Gauss [1] pour différentes valeurs de n.

---

[1] *Methodus nova...* (*Comment. Soc. Goetting.*, 1815).

Si les limites de l'intégrale sont 0 et 1, on peut se servir du polynôme

$$\Phi(x) = d_x^n [x^n (x-1)^n]$$

comme ayant des propriétés analogues au polynôme $d_x^n (x^2-1)^n$, à la seule différence près que ses racines seront comprises entre 0 et 1. L'équation (II) donne alors

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi'(\alpha)} \int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha}.$$

Nous avons ensuite, comme dans le cas précédent,

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = \frac{1}{\Phi'(\alpha)} \int_0^1 \frac{[\Phi(x)]^2\, dx}{(x-\alpha)^2},$$

et, intégrant par parties,

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = -\frac{1}{\Phi'(\alpha)} \left\{ \frac{[\Phi(0)]^2}{\alpha} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha} \right\} + 2\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha},$$

par conséquent

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = \frac{1}{\Phi'(\alpha)} \left\{ \frac{[\Phi(0)]^2}{\alpha} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha} \right\}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{[\Phi'(\alpha_k)]^2} \left\{ \frac{[\Phi(0)]^2}{\alpha_k} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha_k} \right\} = A_k,$$

on a, pour calculer l'intégrale, l'expression suivante

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = A_1 \varphi(\alpha_1) + A_2 \varphi(\alpha_2) + \ldots + A_n \varphi(\alpha_n).$$

On trouve les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pour les six premières valeurs de n dans le *Calcul intégral* de M. Bertrand, page 343.

11. Appliquons l'équation (I) à la détermination de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

en prenant

$$F(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}(1-x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4}(1-x^2)^2 \ldots = \cos(n \operatorname{arc}\cos x).$$

En supposant $\varphi(x)$ développable en série entre les limites -1 et $+1$, nous comprendrons sous $\varphi(x)$ la somme des premiers $2n$ termes du développement de cette fonction. Divisant dans cette supposition $\varphi(x)$ par $F(x)$, soient $f_1(x)$ le quotient et $f(x)$ le reste qui sera un polynôme de degré $n-1$

$$\varphi(x) = f_1(x)F(x) + f(x).$$

En divisant par $\sqrt{1-x^2}$ et intégrant entre les limites -1 et $+1$, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x).F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons, dans le premier terme du second membre de cette équation,

$$x = \cos u;$$

nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x).F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} f_1(\cos u)\cos nu\,du.$$

Le second membre de cette égalité se compose des termes du type

$$A\int_0^{\pi} \cos^k u \cos nu\,du.$$

a la condition que $k < n$. Mais, en remarquant que

$$\cos^k u \cos nu = \frac{1}{2^k}\Big[\cos(n+k)u + k\cos(n+k-2)u + \frac{k(k-1)}{1.2}\cos(n+k-4)u + \ldots + \cos(n-k)u\Big],$$

nous trouvons, pour $k < n$,

$$\int_0^\pi \cos^k u \cos nu\, du = 0;$$

par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et de cette manière l'intégrale, dont la fonction sous-intégrale consisterait dans la somme de $2n$ termes, se réduit à une intégrale, dont la fonction sous-intégrale contient n termes seulement.

C'est à cette dernière intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

que nous appliquerons l'équation (I).

Désignant les racines de l'équation

$$F(x) = \cos(n \arccos x) = 0$$

par

$$\alpha_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi = \cos a_k,$$

prenant pour k tous les nombres de 0 à $n-1$ et remarquant que

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

nous trouvons (équat. I)

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \frac{\varphi(\cos a_k)\sin a_k}{\sin n a_k}\,\frac{\cos(n \arccos x)}{x - \cos a_k}.$$

En divisant par $\sqrt{1-x^2}$ et intégrant, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \frac{\varphi(\cos a_k)\sin a_k}{\sin n a_k} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos(n \arccos x)\,dx}{(x-\cos a_k)\sqrt{1-x^2}},$$

Il est aisé de calculer l'intégrale du second membre de cette équation. En y faisant à cet effet $x = \cos u$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\cos(n \arccos x)\,dx}{(x-\cos a_k)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos nu\,du}{\cos u - \cos a_k};$$

remarquons que, $\cos a_k$ étant une des racines du numérateur $\cos nu$ considéré comme fonction de $\cos u$, $\cos nu$ se divisera par

$$\cos u - \cos a_k$$

et donnera au quotient un polynôme de degré $n-1$ relativement à $\cos u$. Par suite, on peut poser

$$\frac{\cos nu}{\cos u - \cos a_k} = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots + A_{n-1} \cos(n-1)u.$$

Chassant le dénominateur, remplaçant le produit des cosinus par la somme des cosinus et comparant les coefficients, on obtient les $n+1$ équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_0 \cos a_k,\\
&A_2 + A_0 = 2A_1 \cos a_k,\\
&A_3 + A_1 = 2A_2 \cos a_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{n-1} + A_{n-3} = 2A_{n-2} \cos a_k,\\
&A_{n-2} = 2A_{n-1} \cos a_k,\\
&A_{n-1} = 2.
\end{aligned}$$

Des premières $n-1$ équations nous avons, pour tout s, depuis 1 jusqu'à $n-1$,

$$A_s = A_0 \cos(s a_k).$$

Mais la dernière nous donne

$$A_0 = \frac{2}{\cos(n-1)a_k} = \frac{2}{\cos na_k \cos a_k + \sin na_k \sin a_k} = \frac{2}{\sin na_k \sin a_k}.$$

Quant à l'avant-dernière équation

$$A_{n-2} = 2 A_{n-1} \cos a_k,$$

elle est satisfaite par elle-même, si l'on y remplace A_{n-2} et A_{n-1} par les valeurs obtenues plus haut.

On trouve, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\frac{\cos nu}{\cos u - \cos a_k} = \frac{2}{\sin na_k \sin a_k}\left[\frac{1}{2} + \cos a_k \cos u + \cos 2a_k \cos 2u + \ldots \right.$$
$$\left. + \cos(n-1)a_k \cos(n-1)u\right],$$

et, intégrant entre les limites o et π, on a

$$\int_0^\pi \frac{\cos nu\, du}{\cos u - \cos a_k} = \frac{\pi}{\sin na_k \sin a_k}.$$

Par suite, l'équation déterminant l'intégrale cherchée conduit à l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1} \varphi(\cos a_k),$$

où

$$a_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Cette équation détermine l'intégrale qui correspond à $2n$ termes du développement de la fonction sous-intégrale $\varphi(x)$ par la somme seulement de n termes

12. Prenons pour $F(x)$ le polynôme de degré $n+1$

$$F(x) = nx(nx-1)(nx-2)\ldots(nx-n)$$

qui a pour racines $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$, et supposons que les limites de l'in-

tégration soient 0 et 1; alors (équat. II)

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_0^n \frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x - \frac{k}{n}},$$

ou, posant

$$\frac{1}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x - \frac{k}{n}} = A_k,$$

nous avons

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = A_0\varphi(0) + A_1\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + A_2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + A_n\varphi(1).$$

Pour déterminer les coefficients A, remarquons que, pour tout s moindre que $n+1$, on a (équat. I)

$$x^s = \sum_0^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^s}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \frac{F(x)}{x - \frac{k}{n}}$$

et, intégrant entre les limites 0 et 1,

$$\frac{1}{s+1} = \sum_0^n \left(\frac{k}{n}\right)^s A_k.$$

Faisant s consécutivement égal à 0, 1, 2, ..., n, nous trouvons le système des équations

$$\begin{aligned}
A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n &= 1,\\
A_1 + 2A_2 + \ldots + nA_n &= \frac{n}{2},\\
A_1 + 2^2A_2 + \ldots + n^2A_n &= \frac{n^2}{3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_1 + 2^nA_2 + \ldots + n^nA_n &= \frac{n^n}{n+1},
\end{aligned}$$

servant à déterminer tous les coefficients A.

On trouve ainsi :

Pour $n = 1$..... $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$;

Pour $n = 2$..... $A_0 = A_2 = \frac{1}{6}$, $A_1 = \frac{2}{3}$;

Pour $n = 3$..... $A_0 = A_3 = \frac{1}{8}$, $A_1 = A_2 = \frac{3}{8}$,

et ainsi de suite [1].

---

[1] *Voir* BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 333.

Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge;

Par M. J. BOURGET,

Recteur de l'Académie de Clermont.

1. Considérons $m = 2n$ objets que nous nommerons, dans un premier ordre,

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad (n+1), \quad \ldots, \quad (2n-2), \quad (2n-1), \quad 2n$$

et formons la substitution indiquée par l'ensemble des deux lignes correspondantes suivantes :

$$\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots, & n & (n+1) & \ldots, & (2n-2) & (2n-1) & 2n \\ 2n & (2n-2) & (2n-4) & \ldots, & 2 & 1 & \ldots, & (2n-5) & (2n-3) & 2n-1 \end{matrix} \right|,$$

où tous les nombres pairs, à partir du plus élevé, sont écrits, dans la seconde ligne, les uns à la suite des autres et à leur suite tous les nombres impairs dans leur ordre.

Dans le cas particulier de dix objets, la permutation donne le tableau suivant :

$$\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{matrix} \right|.$$

On peut regarder les deux lignes comme indiquant une *substitution* des éléments de la seconde ligne aux éléments de la première. C'est cette substitution qu'on nomme *Battement de Monge*.

2. Si les objets donnés sont des cartes numérotées, on peut réaliser la permutation ou substitution indiquée par les deux lignes ci-dessus au moyen d'une opération matérielle fort simple et fort connue. Plaçons la deuxième carte au-dessus de la première; laissons la troisième à sa place et plaçons la quatrième au-dessus du jeu; laissons la cinquième à sa place et plaçons la sixième au-dessus du jeu, etc. Après ce battement, les cartes paires seront les unes au-dessous des autres en ordre inverse et les cartes impaires seront au-dessous des premières dans leur ordre naturel.

3. *Historique de la question.* — Le premier, à ma connaissance, qui se soit occupé des propriétés de ce battement est Bachet, sieur de Méziriac, dans son livre des *Problèmes plaisants et délectables* (1).

Monge a publié un Mémoire sur ce sujet dans le VIIe Volume des *Savants étrangers* (1re série).

La question, traitée par Bouniakowski dans son travail *Sur un problème de position relatif à la théorie des nombres* (2), n'est autre que celle du Battement de Monge. Ce Mémoire a été résumé par Terquem dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1858).

Bellavitis, dans la *Revista* de 1860 (p. 29), résume aussi le même Mémoire de Bouniakowski et fait connaître quelques propriétés nouvelles des périodes auxquelles il conduit.

On trouve dans les *Mémoires de l'Académie du Gard* (1865) un travail peu connu de M. Thomas de Saint-Laurent sur le même sujet. Cet auteur reprend et généralise le problème du battement de Monge; il ne connaît pas le travail russe que nous venons de citer, et, de plus, il commet quelques erreurs.

Je me propose ici de résumer les Mémoires que je viens de citer et d'élucider certains points restés obscurs, qui n'ont pas été traités.

4. *Propriétés du battement de Monge.* — Quand on répète indéfiniment le même battement sur un nombre de cartes choisi, on observe qu'au bout d'un nombre limité d'opérations les cartes reprennent leur

(1) *Voir* 4e édition, Gauthier-Villars, 1879, p. 214.

(2) *Bulletin physique et mathématique de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1857.

ordre primitif, et qu'elles reviennent périodiquement à l'une des places qu'elles occupent pendant les battements successifs.

Au premier rang, par exemple, viennent se placer périodiquement, dans un certain ordre, soit toutes les autres cartes, soit un certain nombre d'entre elles.

Cette période n'est pas la même en général pour tous les rangs. Parfois, certaines cartes restent immobiles. Ces faits singuliers et variables suivant le nombre $m = 2n$ méritent d'être expliqués. Ils se rattachent, comme on le verra, à la théorie des nombres.

Voici trois tableaux de ces battements successifs qui montrent bien les particularités dont nous venons de parler.

1° $m = 10$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	6	4	2	1	3	5	7	9
9	5	1	4	8	10	6	2	3	7
7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2° $m = 14$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
14	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	13
13	9	5	1	4	8	12	14	10	6	2	3	7	11
11	3	6	14	8	1	9	13	5	4	12	10	2	7
7	10	4	13	1	14	3	11	6	8	9	5	12	2
2	5	8	11	14	13	10	7	4	1	3	6	9	12
12	6	1	7	13	11	5	2	8	14	10	4	3	9
9	4	14	2	11	7	6	12	1	13	5	8	10	3
3	8	13	12	7	2	4	9	14	11	6	1	5	10
10	1	11	9	2	12	8	3	13	7	4	14	6	5
5	14	7	3	12	9	1	10	11	2	8	13	4	6
6	13	2	10	9	3	14	5	7	12	1	11	8	4
4	11	12	5	3	10	13	6	2	9	14	7	1	8
8	7	9	6	10	5	11	4	12	3	13	2	14	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

3° $m = 22$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
21	17	13	9	5	1	4	8	12	16	20	22	18	14	10	6	2	3	7	11	15	19
19	11	3	6	14	22	16	8	1	9	17	21	13	5	4	12	20	18	10	2	7	15
15	2	18	12	5	21	9	8	22	6	11	19	3	14	16	1	17	13	4	20	10	7
7	20	13	1	14	19	6	8	21	12	2	15	18	5	9	22	11	3	16	17	4	10
10	17	3	22	5	15	12	8	19	1	20	7	13	14	6	21	2	18	9	11	16	4
4	11	18	21	14	7	1	8	15	22	17	10	3	5	12	19	20	13	6	2	9	16
16	2	13	19	5	10	22	8	7	21	11	4	18	14	1	15	17	3	12	20	6	9
9	20	3	15	14	4	21	8	10	19	2	16	13	5	22	7	11	1	18	17	12	6
6	17	18	7	5	16	19	8	4	15	20	9	3	14	21	10	2	13	22	11	1	12
12	11	13	10	14	9	15	8	16	7	17	6	18	5	19	4	20	3	21	2	22	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Dans le premier cas, nous observerons :

Une période de six termes (1, 10, 9, 7, 3, 6);

Une période de trois termes (2, 8, 5);

Une période monôme (4).

Dans le second cas, nous ne trouvons qu'une période de quatorze termes.

Dans le troisième, nous observons :

Une période de douze termes (1, 22, 21, 19, 15, 7, 10, 4, 16, 9, 6, 12);

Une période de quatre termes (2, 20, 17, 11);

Une période de trois termes (3, 18, 13);

Une période de deux termes (5, 14);

Une période monôme (8).

Les exemples que nous venons de donner serviront de vérification expérimentale pour les théorèmes qui suivent.

5. Théorème. — *Après la répétition d'un nouveau battement semblable sur les objets disposés comme l'indique la seconde ligne, on trouvera, au-dessous de chaque numéro de la seconde ligne, les nombres qu'il y avait au-dessous des mêmes numéros de la première ligne.*

Supposons que le numéro A de la seconde ligne soit sous le numéro B de la première, et que B de la seconde soit sous le numéro C

de la première. Ces deux lignes présenteront l'aspect suivant après le premier battement :

Première ligne.....	B	...	C
Deuxième ligne..	A	...	B

Faisons un nouveau battement : comme sous C de la première ligne il y a B, sous B qui joue le rôle de C il y aura A qui joue le rôle de B. C. Q. F. D.

Corollaire. — Il suit de là qu'on peut écrire immédiatement les résultats des battements successifs, quand on s'est donné la peine d'écrire les résultats du premier battement. C'est le procédé que nous avons suivi pour former les tableaux précédents.

6. Théorème. — *On retombe nécessairement sur la première disposition au bout d'un nombre limité d'opérations.*

Le battement de Monge équivaut à une substitution. Or toute substitution est décomposable en un certain nombre de substitutions circulaires. Considérons, par exemple, le cas de $m = 10$. Le battement de Monge donne la substitution

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{matrix}$$

Prenons l'élément 1; il remplace 6, qui remplace 3, qui remplace 7, qui remplace 9, qui remplace 10, qui remplace 1. Nous trouvons donc déjà une substitution circulaire que nous désignerons par

$$(1 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 10)$$

en entendant que chaque élément remplacera le suivant, et qu'après la substitution leur ensemble présentera la disposition

$$(10 \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 9).$$

Prenons maintenant l'un des éléments, 2, qui n'entre pas dans cette suite; cet élément remplace 5, qui remplace 8, qui remplace 2. Donc, nous trouvons encore la substitution circulaire

$$(2 \quad 5 \quad 8).$$

Enfin, 4 reste à la même place et se substitue à lui-même; donc, enfin, le battement de Monge est équivalent à l'ensemble des trois substitutions circulaires suivantes :

$$(1\ 6\ 3\ 7\ 9\ 10),\quad (2\ 5\ 8),\quad (4),$$

et l'on peut s'assurer, en effet, qu'en effectuant successivement ces permutations circulaires, on retombe sur les résultats donnés par le battement de Monge.

Le même raisonnement s'applique à une substitution quelconque d'un nombre quelconque d'éléments; donc il est prouvé que *le battement de Monge est toujours décomposable en substitutions circulaires.*

Cela posé, soient α, β, γ, ... les nombres respectifs des éléments que contient chacune de ces substitutions élémentaires; désignons par μ le plus petit multiple commun de ces nombres. Après μ opérations, on retombera sur la disposition primitive; car, dans chaque groupe circulaire, il faut faire autant d'opérations qu'il y a d'éléments pour revenir à la disposition primitive.

Remarque. — Dans les tableaux formés ci-dessus, on voit que le nombre des termes de chaque période est un diviseur du nombre des termes de la période qui commence par 1. C'est une loi générale dont nous donnerons la raison plus loin.

7. Théorème. — *Dans le tableau des battements, si, à partir de la première ligne reproduite, on lit de bas en haut les nombres des colonnes verticales, on obtient les places successives occupées par le nombre dont on est parti.*

Pour fixer les idées, considérons le tableau relatif à $m = 10$.

$m = 10.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	6	4	2	1	3	5	7	9
9	5	1	4	8	10	6	2	3	7
7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

.....

La première colonne, lue de bas en haut, donne

$$1 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 9 \quad 10;$$

il s'agit de prouver que ces divers nombres indiquent les places successives occupées par 1.

1° *Un* étant sous 6, après le premier battement, occupera donc le sixième rang après ce battement.

2° Après le premier battement 6 va sous 3, et comme 1 va sous 6 après le second battement, comme après le premier le groupe $\left|\begin{matrix}6\\1\end{matrix}\right|$ se trouvera sous 3, après le second battement, donc 1 occupera le troisième rang.

3° 3 va sous 7 après le premier battement, après le second 6 va sous 3, après le troisième 1 va sous 6; donc, après ce troisième battement le groupe $\left|\begin{matrix}3\\6\\1\end{matrix}\right|$ se trouvera sous 7; donc 1 occupera le septième rang, etc. Le théorème est donc démontré.

Nous appellerons *période* d'un battement la série des places occupées par un même élément, et nous placerons cet élément au commencement de cette série, puisque c'est la première place qu'il occupe.

On obtient les périodes *mécaniquement* comme l'indique le théorème. Le terme au-dessous du terme de la première ligne d'où l'on part est donc le dernier terme de la période.

8. Problème. — *Trouver la formule du terme qui se trouve au-dessous d'un terme donné de la première ligne après un battement.*

1° Soit $n+1-p$ un terme de la première ligne. Si $p=1$, le terme situé au-dessous est 2; si $p=2$, le terme situé au-dessous est 4, etc. Donc, si p est quelconque différent de zéro, le terme situé au-dessous est $2p$.

2° Soit $n+1+p$ un terme de la première ligne; si $p=0$, le terme situé au-dessous est 1; si $p=1$, le terme situé au dessous est 3, etc. Si p est quelconque, positif, entier ou nul, le terme situé au-dessous est $2p+1$. Le tableau suivant résume le théorème :

$$\begin{matrix} n+1-p, & (p>0), & \qquad & n+1+p, & (p>0), \\ 2p, & & & 2p+1. & \end{matrix}$$

Corollaire I. — Si nous lisons ce tableau de bas en haut, nous obtenons, d'après le théorème précédent, les rangs successifs occupés par un élément. Donc, après un battement,

L'élément $2p$ occupe le rang $n+1-p$.

L'élément $2p+1$ occupe le rang $n+1+p$.

Corollaire II. — Posons $n+1-p=q$, d'où nous tirons

$$p=n+1-q.$$

Le nombre situé au-dessous est $2n+2-2q$, ou $m+2-2q$, et q est au plus égal à n.

Posons de même $n+1+p=q$; d'où $p=q-n-1$. Le nombre situé au-dessous est $2q-2n-1$ ou $2q-m-1$; q est toujours supérieur à n.

Le tableau suivant peut donc remplacer celui ci-dessus :

$$\begin{array}{cc} q \leqq n, & q > n, \\ m+2-2q, & 2q-m-1. \end{array}$$

9. Problème. — *Le battement de Monge peut-il présenter une période monôme? Dans quel cas? Quelle est la formule de ce monôme invariable de position?*

1° On ne peut pas avoir

$$2p+1=n+1+p,$$

car on en déduirait $p=n$, et, par suite, le terme invariable serait $2n+1$, ce qui est impossible.

2° On peut avoir

$$2p=n+1-p;$$

on en déduit

$$p=\frac{n+1}{3}.$$

Donc, n est l'un des nombres de la suite

$$n=2,\quad 5,\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad 17,\quad 20,\quad 23,\quad 26,\quad \ldots.$$

par suite m l'un des nombres de la suite :

$$m = 4, \quad 10, \quad 16, \quad 22, \quad 28, \quad 34, \quad 40, \quad 46, \quad 52, \quad \ldots.$$

La formule du terme invariable est $2p = \frac{m+2}{3}$. Suivant les cas, on aura

$$2p = 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \quad 18, \quad \ldots.$$

On peut vérifier facilement l'exactitude de ces résultats.

10. Problème. — *Étant donné le rang c_1 d'un objet dans une première disposition, trouver le rang c_2 qu'il occupera après le battement*

1° Si $c_1 = 2p$ après le premier battement, cet élément sera le $p^{\text{ième}}$ objet à gauche de $n+1$; donc il occupera le rang

$$c_2 = n + 1 - p = n + 1 - \frac{c_1}{2}.$$

2° Si $c_1 = 2p + 1$ après le premier battement, cet élément impair occupera le rang

$$c_2 = n + 1 + p = n + 1 + \frac{c_1 - 1}{2}.$$

Nous retombons sur des résultats trouvés au n° **8**.

Le tableau suivant résume la solution de ce problème :

$$c_1 = 2p, \qquad c_1 = 2p + 1,$$
$$c_2 = n + 1 - p, \quad c_2 = n + 1 + p.$$

Corollaire. — Des formules ci-dessus, on tire

Pour le premier cas : $2(2c_2 - 1) = 4n + 1 - (2c_1 - 1)$,

Pour le second cas : $2(2c_2 - 1) = 4n + 1 + (2c_1 - 1)$.

Donc, en posant

$$2c_1 - 1 = V_1, \quad 2c_2 - 1 = V_2, \quad 4n + 1 = 2m + 1 = N,$$
$$\varepsilon = (-1).$$

Ces deux formules se réduisent à la formule unique

$$(A) \qquad 2V_2 = N - \varepsilon^{p_1} V_1.$$

11. Problème. — *Peut-il y avoir des périodes binômes? A quelles conditions? Quelles sont les formules des termes constituant de pareilles périodes?*

Désignons par i un nombre impair et par ϖ un nombre pair. La période binôme ne peut avoir que l'une des quatre formules suivantes :

$$(i, i), \quad (i, \varpi), \quad (\varpi, i), \quad (\varpi, \varpi).$$

Si l'on trouve une période (i, ϖ), on trouvera la période (ϖ, i) avec les mêmes nombres, évidemment. Donc, en réalité, la période binôme ne peut présenter que l'une des trois formes suivantes :

$$(i, i), \quad (i, \varpi), \quad (\varpi, \varpi).$$

1° La première forme est impossible, car elle conduirait aux équations

$$2p + 1,$$

$$n + 1 + p = 2p_1 + 1,$$

$$n + 1 + p_1 = 2p + 1,$$

d'où l'on tire

$$3n + p = 4p,$$

par suite

$$p = n,$$

d'où l'on conclurait que le premier terme de cette période est $2n + 1$, ce qui est impossible.

2° La seconde forme conduit aux équations

$$n + 1 - p = 2p_1,$$

$$n - 1 + p_1 = 2p + 1,$$

d'où l'on tire

$$2p + 1 = \frac{m + 3}{5},$$

$$2p_1 = \frac{3m + 4}{5}.$$

On voit par ces formules que m ne peut avoir que l'une des valeurs suivantes :

$$m = 2,\ 12,\ 22,\ 32,\ 42,\ 52,\ \ldots.$$

Les termes correspondants de la période binôme sont

$$\begin{aligned} 2p+1 &= 1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\\ 2p_1 &= 2,\quad 8,\quad 14,\quad 20,\quad 26,\quad 32. \end{aligned}$$

3° Une période binôme de la forme (ϖ, ϖ) est une période monôme ; car, des équations auxquelles elle conduit,

$$\begin{aligned} n+1-p &= 2p_1,\\ n+1-p_1 &= 2p, \end{aligned}$$

on tire

$$2p = 2p_1 = \frac{m+2}{3}.$$

Remarque. — On trouverait facilement les équations qui conduiraient à la connaissance des périodes trinômes, quatrinômes, etc., de diverses formes. Ces recherches assez laborieuses peuvent être abrégées par la solution du problème suivant et par les conséquences qu'on en tire :

1° Problème. — *Quel est le nombre minimum de battements au bout desquels on retombera sur la première disposition?*

Pour résoudre ce problème difficile, je me servirai de la formule trouvée dans le corollaire du problème n° **10**.

Après p battements, on obtient la série des équations

$$\begin{aligned} 2V_2 &= N - \varepsilon^{\varphi_1} V_1,\\ 2V_3 &= N - \varepsilon^{\varphi_2} V_2,\\ 2V_4 &= N - \varepsilon^{\varphi_3} V_3,\\ 2V_5 &= N - \varepsilon^{\varphi_4} V_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 2N_{p+1} &= N - \varepsilon^{\varphi_p} V_p. \end{aligned}$$

De là nous tirons, par substitutions successives,

$$2^p V_{p+1} = (2^{p-1} - 2^{p-2}\varepsilon^{v_p} + 2^{p-3}\varepsilon^{v_{p-1}+v_p} - 2^{p-4}\varepsilon^{v_{p-2}+v_{p-1}+v_p} + \ldots - \varepsilon^{p+v_2+v_3+\ldots+v_p})N + \varepsilon^{p+v_1+v_2+\ldots+v_p} V_1.$$

Mais, si, après ces p battements, v_1 a repris sa première place, on a $V_{p+1} = V$; donc

$$(2^p - \varepsilon^{p+v_1+v_2+\ldots+v_p}) V_1 = (2^{p-1} - 2^{p-2}\varepsilon^{v_p} + 2^{p-3}\varepsilon^{v_{p-1}+v_p} - \ldots - \varepsilon^{p+v_2+v_3+\ldots+v_p})N.$$

La parenthèse du second membre est un nombre entier : donc N est un diviseur du premier membre. On voit déjà que la plus grande valeur de p, ou la plus longue période, s'obtiendra en supposant $V_1 = 1$ ou $v_1 = 1$.

Pour nous débarrasser de la considération des valeurs $v_2, v_3, \ldots, v_p$ intermédiaires, remarquons que

$$2^p - \varepsilon^{p+v_1+v_2+\ldots+v_p}$$

est égal à $2^p \pm 1$. Multiplions les deux membres de l'égalité par

$$2^p + \varepsilon^{p+v_1+v_2+\ldots+v_p},$$

il viendra

$$(2^{2p} - 1) V_1 = \mathfrak{M} N,$$

ou bien

$$(4^p - 1) V_1 = \mathfrak{M} N,$$

ou bien

$$(2^p - 1)(2^p + 1) V_1 = \mathfrak{M} N,$$

d'où l'on voit que l'on est ramené à chercher la plus petite valeur de p, qui rend $(4^p - 1) V_1$ divisible par N.

Cette valeur de p étant trouvée, on s'assurera que l'un ou l'autre des produits

$$(2^p - 1) V_1, \quad (2^p + 1) V_1$$

est divisible par N. Si l'un d'eux est divisible par N, la valeur de p est trouvée. Si aucun n'est divisible par N, le produit $(2^{2p} - 1) V_1$ l'est par hypothèse ; donc la période est $2p$.

Corollaire. — Pour trouver la période relative à $v_1 = V_1 = 1$, il faut chercher la plus petite valeur de p qui rend

$$4^p - 1$$

divisible par $N = 2m + 1$. Cette valeur de p étant trouvée, on cherchera si l'un des facteurs

$$2^p - 1, \quad 2^p + 1$$

est divisible par N. Si l'un de ces facteurs est divisible, la valeur trouvée pour p est la période. Si aucun de ces facteurs n'est divisible par N, la période est $2p$, puisque $2^{2p} - 1$ est divisible par N, par hypothèse.

Premier exemple. — Soit $m = 22$, d'où $N = 45$.

Cherchons les restes successifs que les puissances de 4 donnent quand on les divise par 45; nous trouvons

$$4 \quad 16 \quad 19 \quad 31 \quad 34 \quad 1.$$

Donc la première puissance de 4 qui, diminuée de 1, est divisible par 45, est la sixième.

Cherchons maintenant les restes donnés par les diverses puissances de 2 pour le même diviseur; nous trouvons

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 19 \quad 38 \quad 31 \quad 17 \quad 34 \quad 23 \quad 1.$$

Donc ni $2^6 - 1$, ni $2^6 + 1$ ne sont divisibles par 45; donc la période relative à l'élément 1 est 12.

Deuxième exemple. — Soit $m = 28$, d'où $N = 57$.

Les restes successifs des puissances de 4 divisées par 57 sont

$$4 \quad 16 \quad 7 \quad 28 \quad 55 \quad 49 \quad 25 \quad 43 \quad 1.$$

Les restes successifs des puissances de 2 divisées par 57 sont

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 7 \quad 14 \quad 28 \quad -1.$$

Donc 2^9+1 est divisible par 57, donc la période relative à 1 a neuf chiffres, ce qu'on peut vérifier expérimentalement.

13. Théorème. — *Si l'on désigne par $\varphi(N)$ le nombre des entiers premiers à N et inférieurs à lui, la période relative à $v_1 = 1$ est égale à $\varphi(N)$ ou à un sous-multiple de ce nombre.*

En effet, N étant impair est premier avec 4 : donc, d'après le théorème de Fermat généralisé, on a

$$4^{\varphi(N)} - 1 = \mathfrak{M}N;$$

et, comme les restes des puissances d'un nombre se reproduisent périodiquement, $\varphi(N)$ est la plus petite valeur de la puissance de 4 congrue à 1, ou bien un multiple de cette valeur minima. C. Q. F. D.

Ainsi, par exemple, soit $m = 12$ et $N = 25$. Nous trouvons

$$\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5.4 = 20.$$

Donc la première période est 20, ou un diviseur de 20; nous voyons expérimentalement qu'elle est 10.

14. Théorème. — *Si, décomposé en facteurs premiers, N donne*

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

et si l'on désigne par μ le plus petit commun multiple des nombres

$$\varphi(a^\alpha),\ \varphi(b^\beta),\ \varphi(c^\gamma),$$

la première période sera μ ou un diviseur de μ.

En effet on a, d'après le théorème de Fermat,

$$2^{\varphi(a^\alpha)} - 1 = \mathfrak{M}\, a^\alpha,$$
$$2^{\varphi(b^\beta)} - 1 = \mathfrak{M}\, b^\beta,$$
$$2^{\varphi(c^\gamma)} - 1 = \mathfrak{M}\, c^\gamma;$$

donc

$$2^\mu - 1$$

sera aussi divisible par a^α, b^β, c^γ, et, comme ces nombres sont premiers entre eux, il sera divisible par leur produit, et l'on peut poser

$$2^\mu - 1 = \mathfrak{M}\,\mathrm{N}.$$

μ peut n'être pas la plus petite puissance de 2 congrue à 1, et l'on peut avoir trouvé une puissance de 2 inférieure congrue à -1; mais ces puissances sont des sous-multiples de μ; donc le théorème est démontré.

Si, par exemple, $m = 52$, d'où $\mathrm{N} = 105$, nous trouverons

$$\mathrm{N} = 3.5.7,$$

donc

$$\varphi(3) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(7) = 6;$$

par suite,

$$\mu = 12.$$

La première est 12 ou un sous-multiple. Nous pouvons vérifier expérimentalement qu'elle est 12.

Le théorème que nous venons de démontrer assigne une limite supérieure facile à trouver du nombre de termes de la première période.

15. Théorème. — *Si m est la forme*

$$m = 2^\alpha,$$

la première période a $\alpha + 1$ termes.

En effet, nous avons vu qu'un nombre impair $2p + 1$ occupe le rang $1 + n + p$ après un battement. Donc les rangs successifs occupés par 1 seront, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&1,\\
&1 + 2^{\alpha-1},\\
&1 + 2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2},\\
&1 + 2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + 2^{\alpha-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&1 + 2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^\alpha.
\end{aligned}$$

Arrivés là, nous avons le nombre impair; 2^α le rang suivant sera 1. Donc la période a bien $\alpha + 1$ termes. C. Q. F. D.

On peut en conclure que, pour

$$m = 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad \ldots,$$

les premières périodes ont respectivement

$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \ldots$$

termes.

16. Théorème. — *Toute période du battement de Monge a un nombre de termes qui divise le nombre des termes de la première période relative à* 1.

Reprenons l'équation du problème du n° **12**,

$$(4^p - 1)V_1 = \mathfrak{M}N.$$

Supposons que Δ soit le plus grand commun diviseur des nombres V_1 et N; posons

$$V_1 = \Delta V'_1, \quad N = \Delta N'.$$

L'équation donnera

$$(4^p - 1)V'_1 = \mathfrak{M}N',$$

N' étant premier avec V'_1 devra diviser $4^p - 1$: donc on sera ramené à trouver la première puissance de 4, qui, diminuée de 1, sera divisible par N', diviseur de N. La période demandée sera cette puissance ou le double. Cette puissance sera au plus égale à celle qui a été trouvée pour le cas de $V_1 = 1$; donc déjà nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de période plus longue que la première.

Mais nous pouvons aller plus loin.

Soit p le nombre trouvé pour le cas de $V_1 = 1$, de telle sorte que l'on ait

$$4^p - 1 = \mathfrak{M}N = \mathfrak{M}\Delta N' = \mathfrak{M}N'.$$

Soit p' le nombre trouvé pour le cas de $V_1 > 1$, de telle sorte que

$$4^{p'} - 1 = \mathfrak{M}N'.$$

Nous avons nécessairement

$$p = p'q,$$

q pouvant être égal à l'unité.

1° Si $q = 2$, la période relative à v_1 a p' termes ou $2p'$ termes, et, comme la première période a p termes ou $2p$, on voit que le nombre des termes de la première période est bien un multiple du nombre des termes de la période relative à v_1.

2° Si $q = 1$, on a

$$p = p'.$$

Le nombre p' sera le nombre des termes de la période relative à 1, si l'un des deux facteurs

$$2^{p'} - 1 = 2^p - 1, \quad 2^{p'} + 1 = 2^p + 1$$

est divisible par N'; dans le cas contraire, ce sera $2p'$.

De même, p sera le nombre des termes de la première période si l'un de ces deux facteurs est divisible par N : ce sera $2p$ dans le cas contraire.

Or, si l'un de ces deux facteurs est divisible par N, il le sera nécessairement par N', diviseur de N; donc le nombre des termes de la première période sera, dans ce cas, égal au nombre des termes de la période relative à V_1.

Mais il peut arriver qu'aucun de ces deux facteurs ne soit divisible par N, et que cependant l'un des deux soit divisible par N'; dans ce cas, la période relative à 1 a $2p$ termes, et la période relative à V_1 a $p' = p$. Donc encore le nombre des termes de la première période est un multiple du nombre des termes de la période relative à V_1.

C. Q. F. D.

17. Problème. — *Trouver les nombres de termes des diverses périodes d'un battement déterminé.*

Premier exemple. — Proposons-nous de trouver les diverses périodes du battement relatif à $m = 22$.

Nous formons le Tableau suivant :

$v_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$V_1 =$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
$N' =$	45	15	9	45	5	45	45	3	45	45	15	45	9	5	45	45	15	9	45	15	45	45
Période =	12	4	3	12	2	12	12	1	12	12	4	12	3	2	12	12	4	3	12	4	12	12

Les nombres de la troisième ligne sont les quotients de la division du nombre N par le plus grand commun diviseur des nombres V_1 et N. Pour avoir le nombre des termes de la période relative à 2, on cherche les restes des diverses puissances de 4 divisées par 15 : la première puissance qui donne 1 pour reste est la deuxième, et, comme 2^2+1 et 2^2-1 ne sont ni l'un ni l'autre divisibles par 15, la période a quatre termes. On trouve de même les nombres de termes de toutes les autres.

Deuxième exemple. — Soit encore $m = 52$; nous formons sans peine le Tableau suivant :

$v_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$V_1 =$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
N =	105	35	21	15	35	105	105	7	105	105	5	105	21	35	105	105	35	3	105	35	105	105	7	105	15	35
Période =	12	12	6	4	12	12	12	3	12	12	2	12	6	12	12	12	12	1	12	12	12	12	3	12	4	12

$v_1 =$	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$V_1 =$	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103
N =	105	21	35	105	105	5	21	105	35	105	105	7	15	105	35	105	21	35	105	105	35	21	105	35	105	105
Période =	12	6	12	12	12	2	6	12	12	12	12		4	12	12	12	6	12	12	12	12	6	12	12	12	12

Remarque. — Le procédé que nous venons d'employer dispense d'écrire même le résultat matériel d'un seul battement. Toutefois il est moins rapide que celui qui consiste à faire un battement et à partager la substitution en substitutions circulaires, comme nous l'avons indiqué au n° **6**.

Dans le cas de 52 cartes, la substitution qu'indique le battement de Monge équivaut à la suite des substitutions circulaires :

(1 27 40 7 30 12 21 37 45 49 51 52),
(2 26 14 20 17 35 44 5 29 41 47 50),
(3 28 13 33 43 48),
(4 25 39 46),
(6 24 15 34 10 22 16 19 36 9 31 42),
(8 23 38),
(11 32),
(18).

Ce Tableau fait connaître immédiatement le nombre des termes de chaque période ; mais il faut dire qu'il ne donne pas la raison cachée de la périodicité. Cette raison se trouve, en réalité, dans le théorème du n° **16** et le problème du n° **17**.

18. Dans son Opuscule, M. Thomas de Saint-Laurent affirme que le premier terme de chaque période, le plus faible, peut être mis sous la forme

$$\frac{m+y}{2y-1},$$

y étant un nombre entier. L'auteur ne démontre pas cette proposition, il y arrive par induction. Il est facile de voir qu'elle est erronée.

Dans le cas de $m = 52$, considérons la période de 12 termes commençant par 6. Si nous posons

$$\frac{m+y}{2y-1} = 6,$$

nous en tirerons

$$11y = 58,$$

et y n'est pas un nombre entier.

Voici le théorème vrai qu'il faut substituer à celui de M. Thomas de Saint-Laurent.

19. Théorème. — *Tout terme v_1 peut être mis sous la forme*

$$\frac{mx+y}{2y-1},$$

x et y étant positifs et entiers, si m et V_1 sont premiers entre eux.

Posons

$$\frac{mx+y}{2y-1} = v_1,$$

nous en tirons

$$mx + v_1 = V_1 y.$$

Nous remarquerons maintenant que, cette égalité ayant lieu, si V_1

et m avaient un facteur premier commun, il diviserait v_1, par suite $2v_1$, par suite $2v_1 - V_1 = 1$, ce qui est impossible; donc cette égalité ne peut avoir lieu que si m et V_1 sont premiers entre eux.

Cela étant, on sait qu'il est possible de trouver un entier x, tel que $v_1 + mx$ soit un multiple de V_1, et cet entier est inférieur à $V_1 - 1$.

Remarque. — Dans le cas où m et V_1 ne seraient pas premiers entre eux, divisons m par le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, st soit m' le quotient, qui sera le premier avec V_1. Posons

$$\frac{m'x + y}{2y - 1} = v_1.$$

Nous déduirons de là

$$v_1 + m'x = V_1 y.$$

On pourra toujours trouver un nombre entier x inférieur à V_1, tel que $v_1 + m'x$ sera un multiple de V_1, ce qui fera connaître x et y.

Ce théorème va nous servir à démontrer quelques propriétés remarquables des périodes énoncées par M. Thomas.

20. Théorème. — *Si un élément est invariable pendant le battement, il a après lui deux fois plus d'éléments qu'avant.*

Nous avons trouvé

$$\frac{m+2}{3}$$

pour formule de l'élément invariable. Avant cet élément, il y a

$$\frac{m+2}{3} - 1 = \frac{m-1}{3}$$

éléments.

Après cet élément, il y a

$$m - \frac{m+2}{3} = \frac{2m-2}{3}.$$

Ce dernier nombre est double du premier. C. Q. F. D.

21. Théorème. — *Si l'on considère les objets dans leur première disposition, il y a toujours, après le dernier terme d'une période, deux fois plus d'éléments qu'avant le premier terme.*

En effet, le premier terme d'une période peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{m'x+y}{2y-1}.$$

Avant ce premier terme, il y a

$$\frac{m'x+y}{2y-1}-1=\frac{m'x-y+1}{2y-1}$$

termes.

Cela posé, le premier terme de la période étant $\frac{m'x+y}{2y-1}$ et étant situé nécessairement dans la première moitié de la suite totale, le terme situé au-dessous ou le dernier terme de la période sera

$$m+2-\frac{2m'x+2y}{2y-1}.$$

A la suite de ce terme, il y aura

$$m-m-2+\frac{2m'x+2y}{2y-1}=\frac{2m'x-2y+2}{2y-1}$$

termes.

Ce nombre est évidemment double du premier. C. Q. F. D.

22. Théorème. — *Entre l'avant-dernier terme d'une période et le dernier, il y a toujours autant de termes qu'après le dernier.*

Nous venons de voir qu'après le dernier il y a

$$\frac{2m'x-2y+2}{2y-1}$$

termes.

Nous avons trouvé, pour le dernier terme de la période,

$$m+2-\frac{2m'x+2y}{2y-1}.$$

Ce dernier terme est dans la seconde moitié de la série; donc le terme situé au-dessous ou l'avant-dernier de la série sera

$$2m + 4 - \frac{4m'x - 4y}{2y - 1} - m - 1 = m + 3 - \frac{4m'x + 4y}{2y - 1}.$$

Entre ce terme et le dernier, il y a un nombre de termes marqué par leur différence moins *un*, ou

$$-2 + \frac{2m'x + 2y}{2y - 1},$$

ou bien

$$\frac{2m'x - 2y + 2}{2y - 1}.$$

Or ce nombre est précisément le nombre des termes qui suivent le dernier. C. Q. F. D.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME VIII.

Pages.

Sur les coordonnées curvilignes; par M. *Émile Mathieu*.... 5

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski (suite); par M. *E. West*.... 19, 125

Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde; par M. *H. Resal*. 55

Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes; par M. *David*.... 61

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence; par M. *R. Clausius*.... 73

Commentaire a la théorie analytique de la chaleur de Fourier.... 79

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux; par M. *A. Mannheim*.... 167

Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables.... 173

Théorie de l'Électrostatique; par M. *H. Resal*.... 217

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle; par M. *H. Poincaré*.... 251

Extrait d'une Lettre adressée à M. Resal; par M. *de Saint-Germain*.... 297

Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure; par M. *Genty*.... 299

Sur la propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion; par M. *Gouy*.... 335

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss; par M. *Émile Mathieu*.... 357

Pages.

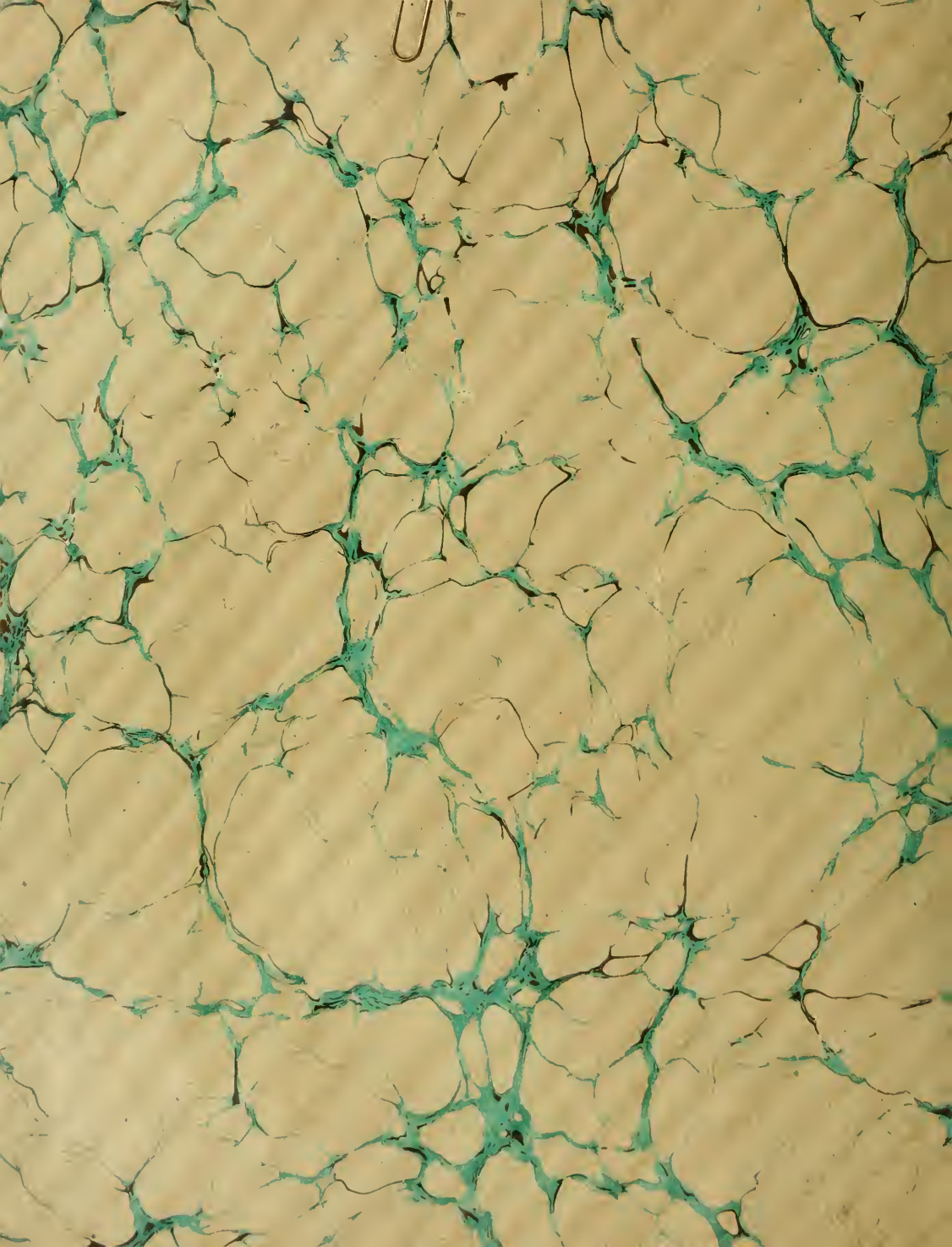
Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis et très tendue..... 383

Sur une formule générale des intégrales définies; par M. *A. Dawidoff*.... 389

Sur un problème de permutations successives, nommé *battement de Monge;* par M. *J. Bourget*..... 413

FIN DU TOME VIII DE LA TROISIÈME SÉRIE.

7434 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.



QA
1
J684
sér.3
t.8
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY